

APUNTES DE BANCA & FINANZAS Nº 5

SOBRE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN PARA EL CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO (VeR)

*Alexander Zapata Galindo**

*David Ricaurte Avella***



* Investigador del Departamento de Análisis Económico de la Asobancaria.

** Subgerente de Riesgos de Mercado del Lloyds TSB Bank.

Los autores agradecen los valiosos comentarios de Ángel Vilariño Sanz y del Departamento de Análisis Económico de la Asobancaria. El contenido de este documento es responsabilidad exclusiva de los autores y, por tanto, no comprometen a la Asobancaria, al Lloyds TSB Bank, ni a sus directivos.

Presidente:

Patricia Cárdenas Santa María

**Director del Departamento
de Análisis Económico:**

Hernán Avendaño Cruz

Investigadores:

Alexander Campos Osorio
Alexander Zapata Galindo
Carlos Adolfo Guzmán Toro
Carolina Barón Buitrago
Jorge Arturo Saza García

Auxiliar de investigación:

Rodrigo Tejada Morales

Impresión:

Tricolor Editores Ltda.
tricolor@colomsat.com.co

SOBRE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN PARA EL CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO (VeR)

RESUMEN

En este artículo se presentan dos metodologías para construir matrices de correlación válidas para el cálculo del Valor en Riesgo (VeR); es decir, simétricas, semidefinidas positivas (o internamente consistentes), con elementos entre -1 y 1 , y unos en su diagonal principal. Una matriz de correlación mal definida podría generar valores en riesgo al cuadrado negativos.

Clasificación JEL. Métodos Estadísticos y Econometría (C49); Economía de los Negocios (M20); Política gubernamental y Regulación (G28).

Palabras claves. Valor en Riesgo; metodología estándar; matriz de correlación.

INTRODUCCIÓN

Recientemente, la Superintendencia Bancaria estableció los criterios y procedimientos que deben seguir los intermediarios de crédito para la medición de su exposición a los riesgos de mercado.

Para ello, las entidades pueden optar por el desarrollo de modelos internos o la metodología estándar definida en las circulares externas 042 de 2001, 003 de 2002 y 007 de 2002.

En la metodología estándar de esta superintendencia se define una matriz de correlación de los diferentes factores de riesgo, la cual es indispensable para el cálculo del Valor en Riesgo (VeR) de los portafolios de las entidades.

El problema radica en que esta matriz no era internamente consistente o, equivalentemente, no era semidefinida positiva; en este orden de ideas, el cálculo del Valor en Riesgo podría generar un número negativo (<0). Por tal razón, la Superintendencia Bancaria expidió la Circular Externa 038 de 2002, en la cual define una nueva matriz de correlación en la que aparentemente se supera este inconveniente; sin embargo, en razón de que en su diagonal principal aparece un elemento diferente de uno y de que fue aproximada a dos decimales, esta matriz de correlación no es válida.

En consecuencia, el objetivo de este trabajo es ilustrar las principales metodologías que existen en la literatura para convertir una matriz de correlación en una matriz válida y hacerla viable para su utilización en el cálculo del VeR.

El documento consta de cinco secciones, de las cuales la primera es esta introducción. En la segunda, se explican el problema y las consecuencias de utilizar matrices de correlación inadecuadas en el cálculo del VeR. En la tercera se muestran dos procedimientos para corregir la matriz de correlación. En la cuarta se presentan algunos ejemplos. En la última se destacan las principales conclusiones.

EL PROBLEMA

La medición del Valor en Riesgo de un portafolio se define, generalmente, como¹:

$$\text{VeR}_{\text{Portafolio}} = \sqrt{[\text{VeR}]^T [\text{MC}] [\text{VeR}]}$$

donde,

[VeR]: vector columna de valores de riesgo individuales por factor²

[MC]: matriz de correlación de los factores de riesgo

T: indica transpuesto

Para que este producto tenga sentido, es necesario que la matriz de correlación (MC) sea una matriz de correlación válida. En este sentido, una matriz de correlación es válida si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) Es simétrica
- (ii) Los elementos de la matriz deben estar entre -1 y 1
- (iii) Los elementos de su diagonal principal deben ser 1
- (iv) Es semidefinida positiva (o internamente consistente)

Generalmente, el cálculo del VeR se ve afectado por el incumplimiento de la cuarta condición. Por ello es importante tener en cuenta que una matriz A ($n \times n$) de varianza-covarianza o de correlación es internamente consistente si para todo vector X ($n \times 1$)

$$X^T A X \geq 0$$

-
1. Si se utiliza un enfoque distinto para calcular el VeR como la teoría de valores extremos, esta expresión analítica del valor en riesgo de un portafolio será diferente.
 2. Recuerde que el VeR de un activo individual es $\text{VeR} = F \times S \times s$
donde F es el factor que determina el nivel de confianza del cálculo, S es el monto de la inversión o la exposición en riesgo y s es la desviación estándar de los rendimientos del activo (volatilidad).

Una matriz que cumpla con esta condición se conoce como semidefinida positiva o definida no negativa.

Para garantizar esta condición es necesario que las medias y las desviaciones estándar de los factores de riesgo sean estimadas en la forma que a continuación se describe:

Sean $X_1, X_2, \dots, X_p$ las rentabilidades de p activos. Supongamos ahora que disponemos de una muestra de N observaciones de cada una de las rentabilidades, es decir,

$$\{x_{1t}\}, \{x_{2t}\}, \dots, \{x_{pt}\} \text{ donde } t = 1, 2, \dots, N$$

Supongamos también que las varianzas s_i^2 $i=1, 2, \dots, p$ y las covarianzas s_{ij} $i \neq j$ se estiman como

$$s_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^N (x_{it} - \bar{x}_i)^2}{N} \text{ y } s_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^N (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)}{N}, \text{ respectivamente.}$$

Además, consideramos la rentabilidad agregada $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_p$, entonces,

$$z_t = x_{1t} + x_{2t} + \dots + x_{pt} \text{ y } \bar{z} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_p. \text{ Luego,}$$

$$s_z^2 = \frac{\sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2}{N} = \frac{\sum_{t=1}^N \left[(x_{1t} - \bar{x}_1) + (x_{2t} - \bar{x}_2) + \dots + (x_{pt} - \bar{x}_p) \right]^2}{N} = 3 \ 0$$

$$= [1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \ 0$$

porque la suma de cuadrados es siempre positiva.

En otras palabras, si utilizamos los estimadores para la media y la varianza definidos anteriormente, la matriz de varianzas y covarianzas siempre será semidefinida positiva.

Ahora como la matriz de varianzas y covarianzas puede ser escrita en términos de la matriz de correlación así,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & 1 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix}$$

entonces, la matriz de correlación también es semidefinida positiva porque

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & 1 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & 1 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix} \geq 0$$

La definición utilizada anteriormente es la más común en la literatura. Sin embargo Magnus y Neudecker (1995) nos ofrecen una alternativa, la cual será de mucha ayuda más adelante:

“Una matriz simétrica es semidefinida positiva si y sólo si todos sus valores propios son no negativos”.

El problema que nos atañe ha sido reconocido en la literatura y se han desarrollado varias metodologías para solucionarlo. En ese orden de ideas, se han

propuesto soluciones parciales como las de Kupiec (1998) y Finger (1997), y métodos más generales como los presentados por Rebonato y Jäckel (1999).

La técnica propuesta por Finger (1997) fue diseñada con el propósito de incrementar algunas correlaciones de la matriz de correlación debido a que ocasionalmente estas estimaciones pueden reflejar fenómenos distintos de los que se ven en los mercados. El problema de este método radica en que no es fácil de implementar en la práctica y es posible que algunas de las otras correlaciones que no queremos modificar se alteren significativamente.

La metodología de Kupiec (1998) es un proceso iterativo que busca ajustar la matriz de correlación utilizando una combinación lineal entre una matriz preexistente semidefinida positiva y la matriz de correlación original. Si bien este método es más general que el anterior, requiere una matriz adicional que no es fácil de determinar.

Ante los anteriores inconvenientes, Rebonato y Jäckel (1999) presentaron un par de alternativas que garantizan una matriz semidefinida positiva, con la ventaja de que no necesitan una matriz preexistente y son fáciles de implementar. Estos métodos son el de descomposición hipersférica y el de descomposición espectral que se analizarán con más detalle en la siguiente sección.

PROCEDIMIENTOS PARA CORREGIR LA MATRIZ DE CORRELACIÓN

A continuación, se presentan dos procedimientos de corrección para generar matrices de correlación válidas:

A) DESCOMPOSICIÓN HIPERESFÉRICA

Un teorema del álgebra lineal matricial establece que M es una matriz $n \times n$ simétrica real semidefinida positiva, si y sólo si existe una matriz W no singular de tamaño $n \times r$ tal que

$$M=WW^T$$

En esta forma, el método busca construir una matriz de correlación válida

$$\hat{C} = BB^T$$

donde los elementos de la matriz $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ se ajustan a las coordenadas de una hiperesfera unitaria de la siguiente manera³:

$$b_{ij} = \begin{cases} \cos\theta_{ij} & \text{para } j=1 \\ \cos\theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_{ik} & \text{para } j=2, \dots, n-1 \\ \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_{ik} & \text{para } j=n \end{cases}$$

Luego, para un conjunto de ángulos $\{\alpha_{ij}\}$, una matriz $\hat{C}$ formada a partir de B satisface todas las restricciones requeridas para una matriz de correlación válida.

Finalmente, utilizando un proceso de optimización se calculan los ángulos $\{\alpha_{ij}\}$ tales que se minimice el error de aproximación entre C y $\hat{C}$ definido como

$$e = \|C - \hat{C}\|$$

donde $\|\cdot\|$ indica la norma de una matriz⁴.

3. Una hiperesfera es la generalización n-dimensional de un círculo (dos dimensiones) y una esfera (tres dimensiones), de tal manera que existen n-tuplas de puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tales que $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$, donde r es el radio de la hiperesfera.

4. La norma de una matriz A se define como

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}, \text{ donde } \text{tr} \text{ indica la traza de la matriz.}$$

Veamos ahora que $\hat{C}$ es una matriz de correlación válida:

En primer lugar, $\hat{C}$ es simétrica y semidefinida positiva por construcción; así se cumplen las condiciones (i) y (iv).

En segundo lugar, todos los elementos de su diagonal principal son unos, cumpliéndose la condición (iii). Esto se demuestra por inducción con base en las identidades trigonométricas:

Como

$$\hat{C} = BB^T$$

se tiene que los elementos de la matriz $\hat{C}$ son:

$$\hat{c}_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk} \text{ para } i, j = 1, \dots, n$$

Así, los elementos de la diagonal principal son de la forma

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{ik} = \sum_{k=1}^n b_{ik}^2 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

En consecuencia, para una matriz 2×2 se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \sin\theta_{11} \\ \cos\theta_{21} & \sin\theta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{11} & \sin\theta_{11} \\ \cos\theta_{21} & \sin\theta_{21} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta_{11} + \sin^2\theta_{11} & \cos\theta_{11}\cos\theta_{21} + \sin\theta_{11}\sin\theta_{21} \\ \cos\theta_{21}\cos\theta_{11} + \sin\theta_{21}\sin\theta_{11} & \cos^2\theta_{21} + \sin^2\theta_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego⁵,

$$\hat{c}_{ii} = \cos^2\theta_{i1} + \sin^2\theta_{i1} = 1 \text{ para } i = 1, 2$$

5. Recuerde que $\sin^2x + \cos^2x = 1$.

Ahora, suponiendo que la relación es válida para una matriz $(n-1) \times (n-1)$, es decir:

$$\hat{c}_{ii} = \cos^2 \theta_{ij} + \sum_{j=2}^{n-2} \cos^2 \theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_{ik} + \prod_{k=1}^{n-2} \sin^2 \theta_{ik} = 1 \text{ para } i, j = 1, \dots, n-1$$

se demuestra que es válida para una matriz $n \times n$, es decir, que para $i, j = 1, \dots, n$

$$\hat{c}_{ii} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \hat{c}_{ii} &= \cos^2 \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n-1} \cos^2 \theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_{ik} + \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \theta_{ik} \\ &= \cos^2 \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n-2} \cos^2 \theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_{ik} + \cos^2 \theta_{in-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin^2 \theta_{ik} + \sin^2 \theta_{in-1} \prod_{k=1}^{n-2} \sin^2 \theta_{ik} \\ &= \cos^2 \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n-2} \cos^2 \theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_{ik} + \prod_{k=1}^{n-2} \sin^2 \theta_{ik} [\cos^2 \theta_{in-1} + \sin^2 \theta_{in-1}] \\ &= \cos^2 \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{n-2} \cos^2 \theta_{ij} \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2 \theta_{ik} + \prod_{k=1}^{n-2} \sin^2 \theta_{ik} \\ &= 1, \text{ por hipótesis inductiva.} \end{aligned}$$

Finalmente, resta demostrar que los elementos de la matriz $\hat{C}$ están entre -1 y 1 para que se cumpla la condición (ii). En este sentido, como

$$\hat{c}_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk} \text{ para } i, j = 1, \dots, n$$

y como los vectores fila que componen la matriz B tienen longitud 1^6 , entonces, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz⁷,

6. La longitud (o norma) de un vector $A = (a_1^2, a_2^2)$ se define como $\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

7. Sean A y B dos vectores, entonces $|AB| \leq \|A\| \|B\|$ donde $|\cdot|$ indica valor absoluto.

$$|\hat{c}_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk} \right| \leq 1$$

luego, $-1 \leq \hat{c}_{ij} \leq 1$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Así, la matriz de correlación corregida por este método es una matriz de correlación válida.

B) DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

La descomposición espectral se basa en la idea de encontrar una matriz similar a la original con base en los valores propios (espectro). El ajuste se hace directamente sobre los valores propios, encontrando una matriz semejante a la matriz diagonal de valores propios ajustados.

Otro teorema del álgebra lineal establece que una matriz real y simétrica C tiene asociado un conjunto de números llamados valores propios (λ_i) y una matriz de vectores propios (S) asociados a esos valores propios tales que:

$$CS = SL \quad \text{donde } L = \text{diag}(\lambda_i)$$

Así, se define ahora una nueva matriz diagonal L' (el ajuste de los valores propios) tal que

$$L' = \text{diag}(\lambda'_i) \quad \text{donde } \lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda_i < 0 \end{cases}$$

y una matriz T (factor de ajuste a la unidad), también diagonal, tal que

$$T = \text{diag}(t_i) \quad \text{donde } t_i = \left[\sum_m s_{im}^2 \lambda'_m \right]^{-1}$$

Ahora sean⁸

$$\begin{aligned} B' &:= S \sqrt{\Lambda'} y \\ B &:= \sqrt{T} B' = \sqrt{T} S \sqrt{\Lambda'}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\hat{C} = BB^T$$

es una matriz de correlación válida.

En resumen, el procedimiento que se debe seguir en este caso es:

1. Calcular los valores propios λ_i y los vectores propios s_i de C .
2. Asignar a todos los valores propios negativos cero.
3. Multiplicar los vectores s_i con los valores propios corregidos λ'_i .
4. Calcular la matriz B' .
5. Calcular la matriz ajustada B .
6. Determinar $\hat{C}$.

Veamos ahora que $\hat{C}$ es realmente una matriz de correlación válida:

En primer lugar, $\hat{C}$ es simétrica y semidefinida positiva por construcción; así se cumplen las condiciones (i) y (iv).

En segundo lugar, todos los elementos de su diagonal principal son unos, cumpliéndose la condición (iii). Esto se demuestra a continuación:

8. Los elementos de la matriz $\sqrt{\Lambda'}$ y $\sqrt{T}$ corresponden a $\{\sqrt{\lambda'_i}\}$ y $\{\sqrt{t_i}\}$, de tal forma que al multiplicar estas matrices (diagonales) por sí mismas el resultado es L' y T , respectivamente.

Dado que

$$\hat{C} = BB^T$$

por la definición de la matriz B se tiene

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \left(\sqrt{T} S \sqrt{\Lambda'} \right) \left(\sqrt{T} S \sqrt{\Lambda'} \right)^T \\ &= \left(\sqrt{T} S \sqrt{\Lambda'} \right) \left(\sqrt{\Lambda'} \right)^T S^T \left(\sqrt{T} \right)^T \\ &= \sqrt{T} S \sqrt{\Lambda'} \sqrt{\Lambda'} S^T \sqrt{T}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\hat{C} = \sqrt{T} S \Lambda' S^T \sqrt{T}$$

Para determinar la forma de los elementos $\hat{C}_{ij}$, con base en la ley asociativa de la multiplicación de matrices, se deben seguir estos pasos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{T} S \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{T} \right)_{ik} S_{kj} \text{ para } i, j = 1, \dots, n \\ &= \sqrt{t_i} s_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{T} S \Lambda' \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \left(\Lambda' \right)_{kj} \\ &= \sqrt{t_i} s_{ij} \lambda'_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{T} S \Lambda' S^T \right)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \left[\sqrt{T} S \Lambda' \right]_{ik} \left[S^T \right]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{jk}\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{T} S \Lambda' S^T \sqrt{T} \right)_{ij} = \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{T} S \Lambda' S^T \right)_{il} \left(\sqrt{T} \right)_{lj}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{lk} (\sqrt{T})_{lj} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{jk} \sqrt{t_j}
 \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{c}_{ij} = \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{jk} \sqrt{t_j} \text{ para } i, j = 1, \dots, n$$

Luego, los elementos de la diagonal principal de $\hat{C}$ son:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{ii} &= \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{ik} \sqrt{t_i} \\
 &= \sum_{k=1}^n t_i s_{ik}^2 \lambda'_{ik} \\
 &= t_i \sum_{k=1}^n s_{ik}^2 \lambda'_k \\
 &= \left[\sum_{m=1}^n s_{im}^2 \lambda'_m \right]^{-1} \sum_{k=1}^n s_{ik}^2 \lambda'_k
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\hat{c}_{ii} = 1 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Finalmente, resta demostrar que los elementos de la matriz $\hat{C}$ están entre -1 y 1 para que se cumpla la condición (ii). Partiendo⁹ del hecho de que

$$\left| \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{jk} \lambda'_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n s_{ik} \sqrt{\lambda'_k} s_{jk} \sqrt{\lambda'_k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n s_{ik}^2 \lambda'_k} \sqrt{\sum_{m=1}^n s_{jm}^2 \lambda'_m}$$

9. Y utilizando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

entonces,

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^n s_{ik} s_{jk} \lambda'_k \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^n s_{ik}^2 \lambda'_k} \sqrt{\sum_{k=1}^n s_{jk}^2 \lambda'_k}} \leq 1$$

Equivalentemente,

$$|\hat{c}_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^n \sqrt{t_i} s_{ik} \lambda'_k s_{jk} \sqrt{t_j} \right| \leq 1$$

es decir, $-1 \leq \hat{c}_{ij} \leq 1$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Así, la matriz de correlación corregida por este método es una matriz de correlación válida.

Puesto que las dos metodologías están sujetas al error estadístico, es necesario verificar la hipótesis nula

$$H_0: C = \hat{C}$$

En este sentido, es necesario calcular el estadístico

$$c^2 := \sum_{ij} (c_{ij} - \hat{c}_{ij})^2 = 2 \sum_{i \leq j} (c_{ij} - \hat{c}_{ij})^2$$

el cual se distribuye teóricamente como una chi-cuadrado con grados de libertad iguales al número de elementos de la matriz C^{10} . En este orden de ideas, si el estadístico calculado con la información disponible es menor que

10. Es posible utilizar en lugar de este estadístico, el estadístico $c^2 := \sum_i (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2$, el cual también se distribuye como una chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de valores propios de C .

el teórico, existiría evidencia para no rechazar la hipótesis nula H_0 , y en consecuencia la matriz corregida será estadísticamente igual a la original.

EJEMPLOS

Para ilustrar las metodologías anteriores, se presentan a continuación las matrices de correlación que se deben utilizar para el cálculo del VeR, definidas en las circulares externas 003 y 038 de 2002 de la Superintendencia Bancaria.

Para nuestro primer ejemplo, nos referiremos a la matriz de la Circular Externa 003 de 2002, es decir

C =

1	0.9	0.89	0.91	0.59	0.82	-0.19	-0.77	0.75	-0.38	0.18	-0.48	-0.14
0.9	1	0.68	0.88	-0.51	0.57	-0.35	-0.4	-0.2	-0.47	0.17	-0.48	-0.5
0.89	0.68	1	0.86	-0.18	0.32	0	-0.5	0	-0.5	0.22	-0.14	-0.454
0.91	0.88	0.86	1	0.37	0.91	-0.17	-0.68	0.39	-0.56	-0.08	0.11	-0.53
0.59	-0.51	-0.18	0.37	1	-0.73	0.93	0.1	0.7	0.39	0.14	0.85	0.3162
0.82	0.57	0.32	0.91	-0.73	1	-0.55	-0.45	-0.39	-0.75	0.16	-0.81	-0.654
-0.19	-0.35	0	-0.17	0.93	-0.55	1	-0.1	0.78	0.16	0.06	0.81	0.07
-0.77	-0.4	-0.5	-0.68	0.1	-0.45	-0.1	1	0.1	0.5	0.11	0.19	0.7471
0.75	-0.2	0	0.39	0.7	-0.39	0.78	0.1	1	0.14	0.19	0.68	0.1068
-0.38	-0.47	-0.5	-0.56	0.39	-0.75	0.16	0.5	0.14	1	0.7	0.39	0.5139
0.18	0.17	0.22	-0.08	0.14	0.16	0.06	0.11	0.19	0.7	1	-0.35	-0.232
-0.48	-0.48	-0.14	0.11	0.85	-0.81	0.81	0.19	0.68	0.39	-0.35	1	0.4511
-0.14	-0.5	-0.45	-0.53	0.316	-0.654	0.07	0.747	0.1068	0.5139	-0.232	0.4511	1

Dicha matriz tiene como valores propios $\{-1.127, -0.412, -0.239, 0.080, 0.174, 0.274, 0.482, 0.529, 0.760, 1.168, 1.763, 3.704, 5.845\}$. Dado que posee algunos valores propios negativos, esta matriz no es una matriz de correlación adecuada.

Si suponemos los siguientes VeR individuales (en pesos) para cada factor de riesgo,

Factor de riesgo	VeR individual
1	-3.000
2	1.000
3	1.000
4	-2.000
5	3.000
6	2.000
7	-2.000
8	-2.000
9	2.000
10	0
11	-1.000
12	-3.000
13	2.000

entonces, el VeR de este portafolio sería igual a $\sqrt{-44.621.200}^{11}$, lo cual es inconsistente.

Al implementar la primera metodología de corrección de la matriz de correlación, se produce entonces la siguiente matriz

$\hat{C} =$

1	0.6970	0.7175	0.9083	0.2428	0.6132	-0.0630	-0.5719	0.4406	-0.3832	0.2084	-0.2198	-0.3002
0.6970	1	0.7940	0.7857	-0.3441	0.7267	-0.4624	-0.4356	-0.1208	-0.4666	0.1599	-0.4606	-0.4962
0.7175	0.7940	1	0.7396	-0.0504	0.4446	-0.0184	-0.5545	0.0961	-0.4545	0.1534	-0.2021	-0.4299
0.9083	0.7857	0.7396	1	0.1625	0.6238	-0.0317	-0.6662	0.3580	-0.5652	-0.0370	-0.0920	-0.4636
0.2428	-0.3441	-0.0504	0.1625	1	-0.5395	0.7950	-0.0039	0.8802	0.3896	0.0901	0.7852	0.3452
0.6132	0.7267	0.4446	0.6238	-0.5395	1	-0.6153	-0.5315	-0.2479	-0.6736	0.0629	-0.7938	-0.6366
-0.0630	-0.4624	-0.0184	-0.0317	0.7950	-0.6153	1	-0.0375	0.7208	0.2305	0.0295	0.7993	0.0407
-0.5719	-0.4356	-0.5545	-0.6662	-0.0039	-0.5315	-0.0375	1	0.0322	0.5306	0.0807	0.2051	0.6999
0.4406	-0.1208	0.0961	0.3580	0.8802	-0.2479	0.7208	0.0322	1	0.1531	0.1684	0.5970	0.1634
-0.3832	-0.4666	-0.4545	-0.5652	0.3896	-0.6736	0.2305	0.5306	0.1531	1	0.5740	0.3180	0.4897
0.2084	0.1599	0.1534	-0.0370	0.0901	0.0629	0.0295	0.0807	0.1684	0.5740	1	-0.2922	-0.1950
-0.2198	-0.4606	-0.2021	-0.0920	0.7852	-0.7938	0.7993	0.2051	0.5970	0.3180	-0.2922	1	0.4146
-0.3002	-0.4962	-0.4299	-0.4636	0.3452	-0.6366	0.0407	0.6999	0.1634	0.4897	-0.1950	0.4146	1

11. Este resultado implica que no es posible calcular la raíz cuadrada para poder obtener el VeR del portafolio.

donde B =

-0.3625	-0.8679	0.1207	0.0805	-0.2795	0.1180	-0.0483	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2498	-0.7385	-0.0461	0.0549	-0.4310	0.3474	0.2840	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0258	-0.5652	-0.1990	0.1214	-0.5893	0.4886	-0.1990	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2704	-0.8156	-0.1084	0.3382	-0.2760	0.1670	0.1772	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.9834	0.1539	0.0383	0.0432	-0.0624	-0.0436	0.0099	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.4054	-0.9073	-0.0352	0.0537	0.0739	-0.0543	0.0054	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7825	0.3463	-0.4521	0.0589	0.0791	0.1444	-0.1810	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0618	0.5854	0.4787	-0.3346	0.3751	0.3596	0.2058	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.9406	-0.1468	0.0143	-0.0178	0.1933	0.2340	0.0329	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.3098	0.5550	0.1930	-0.6727	-0.1752	-0.1890	0.1994	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1592	-0.2097	-0.0941	-0.9414	-0.1853	0.0352	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7001	0.5766	-0.1177	0.3238	-0.0335	0.1297	0.2019	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2336	0.5656	0.7863	0.0434	0.0060	0.0681	-0.0260	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

con estadístico $c^2 = 2.101$.

Así mismo, la segunda metodología arroja los siguientes resultados,

$\hat{C} =$

1	0.6221	0.6235	0.7560	0.2672	0.5185	-0.0657	-0.5259	0.4317	-0.3262	0.1839	-0.2582	-0.2042
0.6221	1	0.6947	0.6721	-0.3373	0.6012	-0.3880	-0.4239	-0.1055	-0.4269	0.1355	-0.4405	-0.4484
0.6235	0.6947	1	0.6759	-0.0612	0.3782	-0.0393	-0.5053	0.0728	-0.4246	0.1556	-0.1593	-0.4147
0.7560	0.6721	0.6759	1	0.1769	0.6040	-0.0602	-0.5656	0.2786	-0.4923	-0.0391	0.0134	-0.4474
0.2672	-0.3373	-0.0612	0.1769	1	-0.4682	0.7227	0.0102	0.7269	0.3558	0.0855	0.6870	0.3230
0.5185	0.6012	0.3782	0.6040	-0.4682	1	-0.5596	-0.4464	-0.2499	-0.6181	0.0797	-0.6905	-0.5860
-0.0657	-0.3880	-0.0393	-0.0602	0.7227	-0.5596	1	-0.0441	0.6514	0.1768	0.0421	0.7068	0.0411
-0.5259	-0.4239	-0.5053	-0.5656	0.0102	-0.4464	-0.0441	1	0.0249	0.4847	0.0953	0.2047	0.6699
0.4317	-0.1055	0.0728	0.2786	0.7269	-0.2499	0.6514	0.0249	1	0.1435	0.1424	0.5296	0.1475
-0.3262	-0.4269	-0.4246	-0.4923	0.3558	-0.6181	0.1768	0.4847	0.1435	1	0.5682	0.3041	0.4619
0.1839	0.1355	0.1556	-0.0391	0.0855	0.0797	0.0421	0.0953	0.1424	0.5682	1	-0.2729	-0.2027
-0.2582	-0.4405	-0.1593	0.0134	0.6870	-0.6905	0.7068	0.2047	0.5296	0.3041	-0.2729	1	0.3615
-0.2042	-0.4484	-0.4147	-0.4474	0.3230	-0.5860	0.0411	0.6699	0.1475	0.4619	-0.2027	0.3615	1

donde B=

0.0000	0.0000	0.0000	0.0144	-0.0074	0.0251	-0.1104	-0.1710	-0.1707	-0.3080	0.2308	0.5737	-0.6718
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0154	0.1846	0.3027	-0.0087	0.0645	0.3509	-0.1515	0.1586	0.0760	-0.8324
0.0000	0.0000	0.0000	0.0140	-0.1106	-0.2440	-0.2100	-0.0523	0.5069	0.0322	0.0652	0.3662	-0.6963
0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0007	-0.0517	0.3215	0.1319	0.0717	-0.1374	-0.1030	0.5516	-0.7333
0.0000	0.0000	0.0000	0.1029	0.1615	-0.1250	0.1309	-0.1540	-0.1467	-0.0607	0.0583	0.8391	0.4174
0.0000	0.0000	0.0000	-0.1204	0.0209	-0.1334	0.1375	0.1929	-0.3155	-0.0592	0.0474	-0.1782	-0.8798
0.0000	0.0000	0.0000	-0.1155	0.1719	-0.0198	-0.2277	0.0792	-0.0050	0.4165	-0.1483	0.6977	0.4651
0.0000	0.0000	0.0000	0.0790	0.0922	-0.1070	-0.0657	0.4521	0.1107	-0.4114	0.2349	-0.2952	0.6643
0.0000	0.0000	0.0000	0.0106	-0.1850	0.1704	-0.1836	0.2629	-0.2134	-0.1091	0.1119	0.8511	0.1987
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0332	-0.0744	0.0947	0.2559	-0.1551	0.1144	0.0430	0.6433	0.0272	0.6821
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0361	0.0167	-0.0878	-0.0010	0.0942	0.0147	0.2978	0.9398	0.0882	-0.0440
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0592	-0.0715	0.0131	0.2441	0.1220	0.2621	0.0241	-0.3400	0.5883	0.6211
0.0000	0.0000	0.0000	-0.1444	0.0213	-0.0664	-0.0902	-0.1802	0.0646	-0.6926	0.0404	-0.0050	0.6695

con estadístico $c^2 = 2.559$.

De lo anterior, se deduce que las dos matrices $\hat{C}$ no rechazan la hipótesis nula de que $C = \hat{C}$ al 95% de confianza, puesto que el estadístico c^2 teórico es menor que 139.9 en ambos casos.

Luego, el VeR del portafolio utilizando la matriz de correlación resultante del primer método de corrección sería igual a \$2.595. De la misma manera, el VeR resultante de implementar la segunda metodología de corrección sería \$2.486.

Ahora, al usar la matriz de correlación definida en la Circular Externa 038 de 2002 como nuestro segundo ejemplo, es decir

C =

1	0.82	0.87	0.80	0.85	0.85	0.67	0.70	0.79	0.60	0.11	0.71	-0.46
0.82	1	0.60	0.67	0.69	0.72	0.38	0.51	0.87	0.58	0.33	0.37	-0.43
0.87	0.60	1.04	0.75	0.89	0.65	0.90	0.58	0.66	0.64	-0.05	0.62	-0.58
0.80	0.67	0.75	1	0.87	0.46	0.64	0.74	0.70	0.77	0.12	0.47	-0.68
0.85	0.69	0.89	0.87	1	0.58	0.78	0.69	0.80	0.82	0.23	0.54	-0.80
0.85	0.72	0.65	0.46	0.58	1	0.33	0.31	0.57	0.20	-0.09	0.70	-0.05
0.67	0.38	0.90	0.64	0.78	0.33	1	0.64	0.51	0.74	0.19	0.37	-0.74
0.70	0.51	0.58	0.74	0.69	0.31	0.64	1	0.74	0.72	0.39	0.35	-0.63
0.79	0.87	0.66	0.70	0.80	0.57	0.51	0.74	1	0.73	0.38	0.31	-0.63
0.60	0.58	0.64	0.77	0.82	0.20	0.74	0.72	0.73	1	0.57	0.16	-0.93
0.11	0.33	-0.05	0.12	0.23	-0.09	0.19	0.39	0.38	0.57	1	-0.17	-0.51
0.71	0.37	0.62	0.47	0.54	0.70	0.37	0.35	0.31	0.16	-0.17	1	-0.05
-0.46	-0.43	-0.58	-0.68	-0.80	-0.05	-0.74	-0.63	-0.63	-0.93	-0.51	-0.05	1

se encuentra que no es una matriz de correlación válida porque uno de los elementos de la diagonal principal es diferente de uno y tiene dos valores propios negativos: -0.0049 y -0.0005 . Como se verá más adelante, esto último podría explicarse por la utilización de una aproximación a dos decimales en las correlaciones corregidas.

En consecuencia, es necesario emplear los métodos descritos en este documento para corregirla y convertirla en una matriz de correlación adecuada.

Si suponemos los siguientes VeR individuales (en pesos) para cada factor de riesgo,

<i>Factor de riesgo</i>	<i>VeR individual</i>
1	2.000
2	17.000
3	-35.000
4	-19.000
5	70.000
6	-22.000
7	-25.500
8	3.000
9	-8.000
10	20.000
11	-10.000
12	-5.500
13	55.000

entonces, el VeR de este portafolio sería igual a $\sqrt{-3.385.000}$, lo cual es inconsistente.

Al implementar la primera metodología de corrección de la matriz de correlación, se produce entonces la siguiente matriz

$\hat{C} =$

1	0.83	0.88	0.80	0.85	0.85	0.67	0.70	0.79	0.60	0.11	0.71	-0.45
0.83	1	0.59	0.68	0.70	0.77	0.37	0.51	0.87	0.60	0.33	0.35	-0.43
0.88	0.59	1	0.75	0.89	0.67	0.89	0.59	0.65	0.64	-0.05	0.61	-0.60
0.80	0.68	0.75	1	0.86	0.45	0.64	0.74	0.70	0.79	0.11	0.48	-0.68
0.85	0.70	0.89	0.86	1	0.57	0.78	0.68	0.81	0.84	0.22	0.56	-0.81
0.85	0.77	0.67	0.45	0.57	1	0.34	0.29	0.59	0.19	-0.09	0.73	-0.03
0.67	0.37	0.89	0.64	0.78	0.34	1	0.64	0.51	0.75	0.19	0.36	-0.74
0.70	0.51	0.59	0.74	0.68	0.29	0.64	1	0.75	0.72	0.39	0.36	-0.62
0.79	0.87	0.65	0.70	0.81	0.59	0.51	0.75	1	0.72	0.38	0.30	-0.65
0.60	0.60	0.64	0.79	0.84	0.19	0.75	0.72	0.72	1	0.59	0.15	-0.95
0.11	0.33	-0.05	0.11	0.22	-0.09	0.19	0.39	0.38	0.59	1	-0.17	-0.51
0.71	0.35	0.61	0.48	0.56	0.73	0.36	0.36	0.30	0.15	-0.17	1	-0.06
-0.45	-0.43	-0.60	-0.68	-0.81	-0.03	-0.74	-0.62	-0.65	-0.95	-0.51	-0.06	1

donde B=

-0.8837	-0.3971	0.0106	0.1155	-0.0708	0.2039	-0.0355	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7333	-0.5890	0.0033	-0.2870	0.1689	-0.0608	-0.0276	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7987	-0.2108	-0.3271	0.3715	-0.0558	0.1717	-0.2001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.9847	0.1225	-0.0039	-0.0405	0.0697	-0.0531	-0.0771	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.9015	-0.1314	-0.3903	0.0765	-0.0835	-0.0346	0.0605	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.5707	-0.7491	0.1771	0.2528	-0.1138	0.0581	-0.0388	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.6539	0.0388	-0.5312	0.1812	-0.1293	0.3759	-0.3129	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7699	0.1306	-0.0835	-0.1853	0.0718	0.5397	0.2291	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7600	-0.3794	-0.2611	-0.2015	0.2669	0.1289	0.2861	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.7691	0.1092	-0.4892	-0.3797	-0.0456	0.0513	-0.0911	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.1284	-0.0994	-0.3383	-0.8492	-0.2817	0.2131	0.1149	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.5906	-0.2387	0.2429	0.4382	-0.5534	0.0582	0.1832	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6491	-0.2032	0.6847	0.2611	0.0025	0.0216	-0.0061	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

con estadístico $c^2 = 0.024$.

Así mismo, la segunda metodología arroja los siguientes resultados,

$\hat{C} =$

1	0.82	0.85	0.80	0.85	0.85	0.67	0.70	0.79	0.60	0.11	0.71	-0.46
0.82	1	0.59	0.67	0.69	0.72	0.38	0.51	0.87	0.58	0.33	0.37	-0.43
0.85	0.59	1	0.74	0.87	0.64	0.88	0.57	0.65	0.63	-0.05	0.61	-0.57
0.80	0.67	0.74	1	0.87	0.46	0.64	0.74	0.70	0.77	0.12	0.47	-0.68
0.85	0.69	0.87	0.87	1	0.58	0.78	0.69	0.80	0.82	0.23	0.54	-0.80
0.85	0.72	0.64	0.46	0.58	1	0.33	0.31	0.57	0.20	-0.09	0.70	-0.05
0.67	0.38	0.88	0.64	0.78	0.33	1	0.64	0.51	0.74	0.19	0.37	-0.74
0.70	0.51	0.57	0.74	0.69	0.31	0.64	1	0.74	0.72	0.39	0.35	-0.63
0.79	0.87	0.65	0.70	0.80	0.57	0.51	0.74	1	0.73	0.38	0.31	-0.63
0.60	0.58	0.63	0.77	0.82	0.20	0.74	0.72	0.73	1	0.57	0.16	-0.93
0.11	0.33	-0.05	0.12	0.23	-0.09	0.19	0.39	0.38	0.57	1	-0.17	-0.51
0.71	0.37	0.61	0.47	0.54	0.70	0.37	0.35	0.31	0.16	-0.17	1	-0.05
-0.46	-0.43	-0.57	-0.68	-0.80	-0.05	-0.74	-0.63	-0.63	-0.93	-0.51	-0.05	1

donde $B =$

0.0000	0.0000	-0.0347	0.0424	-0.0072	0.0367	0.0822	-0.0639	0.0101	-0.0492	0.1036	-0.3394	-0.9254
0.0000	0.0000	0.0108	0.0520	-0.0586	-0.1376	0.1019	0.0232	-0.0619	0.2248	0.5188	-0.1248	-0.7905
0.0000	0.0000	-0.0029	-0.0808	0.0152	-0.0955	-0.0082	-0.1159	-0.1791	0.0872	-0.3258	-0.2479	-0.8737
0.0000	0.0000	0.0030	-0.0531	-0.0200	0.0033	0.1911	0.2201	0.3253	0.1275	-0.1119	0.0028	-0.8816
0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0723	-0.0549	0.0862	-0.1295	0.1587	-0.0463	0.0649	-0.1225	0.0057	-0.9597
0.0000	0.0000	0.0137	0.0021	0.0371	0.2061	0.0339	-0.0484	-0.1797	0.0040	0.2963	-0.6577	-0.6323
0.0000	0.0000	0.0089	0.0323	-0.0305	-0.0321	0.0964	-0.2216	-0.2356	-0.0723	-0.4743	0.1260	-0.7981
0.0000	0.0000	0.0083	0.0082	-0.0155	0.0444	-0.0087	-0.2749	0.4127	-0.2655	0.0094	0.2171	-0.7962
0.0000	0.0000	-0.0020	-0.0181	0.0334	-0.0663	-0.2365	-0.1367	0.0884	0.1670	0.3536	0.0820	-0.8672
0.0000	0.0000	0.0016	0.0297	0.1802	-0.0068	0.0433	0.1160	-0.0333	0.0236	-0.0572	0.4896	-0.8406
0.0000	0.0000	-0.0030	-0.0629	-0.0288	-0.0048	0.0664	0.0414	-0.2332	-0.3787	0.4626	0.6961	-0.3045
0.0000	0.0000	0.0051	0.0365	0.0068	-0.1047	-0.1006	0.2333	0.0221	-0.4410	-0.1004	-0.6494	-0.5444
0.0000	0.0000	0.0004	-0.0878	0.0702	-0.0768	0.1086	-0.1435	0.0755	-0.0946	0.2060	-0.5757	0.7487

con estadístico $c^2 = 0.006$.

De lo anterior, se deduce que las dos matrices $\hat{C}$ no rechazan la hipótesis nula de que $C = \hat{C}$ al 95% de confianza, puesto que el estadístico c^2 teórico es menor que 139.9 en ambos casos.

Luego, el VeR del portafolio utilizando la matriz de correlación resultante del primer método de corrección sería igual a \$6.625. De la misma manera, el VeR resultante de implementar la segunda metodología de corrección sería \$7.741.

Es importante aclarar que los cálculos presentados hasta ahora se realizaron utilizando todos los decimales posibles de las matrices corregidas; sin embargo, para efectos de presentación sólo se muestran dos.

La utilización de aproximaciones de decimales en las correlaciones corregidas puede generar matrices con valores propios negativos cercanos a cero; es posible que la matriz definida en la Circular Externa 038 de 2002, expedida por la Superintendencia Bancaria, haya sufrido este problema.

A manera de ejemplo y usando la matriz de correlación calculada por el método de descomposición espectral, analizaremos qué le sucede al cálculo del VeR cuando se utilizan aproximaciones decimales.

En este sentido, para una aproximación de tres decimales

$\hat{C} =$

1	0.820	0.853	0.800	0.849	0.850	0.670	0.700	0.790	0.600	0.110	0.710	-0.460
0.820	1	0.588	0.670	0.690	0.720	0.380	0.510	0.870	0.580	0.330	0.370	-0.429
0.853	0.588	1	0.735	0.870	0.637	0.881	0.568	0.647	0.627	-0.049	0.608	-0.569
0.800	0.670	0.735	1	0.868	0.460	0.640	0.740	0.700	0.770	0.120	0.470	-0.680
0.849	0.690	0.870	0.868	1	0.579	0.780	0.689	0.799	0.820	0.229	0.539	-0.798
0.850	0.720	0.637	0.460	0.579	1	0.330	0.310	0.570	0.200	-0.090	0.700	-0.050
0.670	0.380	0.881	0.640	0.780	0.330	1	0.640	0.510	0.740	0.190	0.370	-0.739
0.700	0.510	0.568	0.740	0.689	0.310	0.640	1	0.740	0.720	0.390	0.350	-0.630
0.790	0.870	0.647	0.700	0.799	0.570	0.510	0.740	1	0.730	0.380	0.310	-0.630
0.600	0.580	0.627	0.770	0.820	0.200	0.740	0.720	0.730	1	0.570	0.160	-0.929
0.110	0.330	-0.049	0.120	0.229	-0.090	0.190	0.390	0.380	0.570	1	-0.170	-0.510
0.710	0.370	0.608	0.470	0.539	0.700	0.370	0.350	0.310	0.160	-0.170	1	-0.050
-0.460	-0.429	-0.569	-0.680	-0.798	-0.050	-0.739	-0.630	-0.630	-0.929	-0.510	-0.050	1

la matriz tiene dos valores propios negativos: -0.00068 y -0.00011 . Al usar los siguientes valores de riesgo individuales,

$[-10500 \ -5200 \ 10000 \ 10000 \ -20500 \ 10000 \ -2800 \ -1200 \ 6500 \ -6000 \ 3500 \ 3000 \ -13000]$

se obtiene un VeR con un valor de $\sqrt{-751.598}$, lo cual es inconsistente.

Por ello es necesario emplear una aproximación de decimales mayor.

Entonces, para una aproximación de cuatro decimales,

$\hat{C} =$

1	0.8200	0.8525	0.7998	0.8495	0.8498	0.6700	0.7000	0.7899	0.6000	0.1099	0.7100	-0.4596
0.8200	1	0.5877	0.6696	0.6899	0.7197	0.3800	0.5100	0.8697	0.5801	0.3298	0.3699	-0.4294
0.8525	0.5877	1	0.7354	0.8703	0.6374	0.8813	0.5685	0.6470	0.6269	-0.0488	0.6078	-0.5691
0.7998	0.6696	0.7354	1	0.8684	0.4601	0.6396	0.7398	0.7000	0.7696	0.1201	0.4700	-0.6800
0.8495	0.6899	0.8703	0.8684	1	0.5788	0.7798	0.6895	0.7988	0.8197	0.2294	0.5394	-0.7976
0.8498	0.7197	0.6374	0.4601	0.5788	1	0.3297	0.3099	0.5700	0.1998	-0.0899	0.7000	-0.0504
0.6700	0.3800	0.8813	0.6396	0.7798	0.3297	1	0.6398	0.5098	0.7400	0.1898	0.3699	-0.7390
0.7000	0.5100	0.5685	0.7398	0.6895	0.3099	0.6398	1	0.7398	0.7200	0.3899	0.3500	-0.6297
0.7899	0.8697	0.6470	0.7000	0.7988	0.5700	0.5098	0.7398	1	0.7297	0.3800	0.3100	-0.6299
0.6000	0.5801	0.6269	0.7696	0.8197	0.1998	0.7400	0.7200	0.7297	1	0.5698	0.1599	-0.9291
0.1099	0.3298	-0.0488	0.1201	0.2294	-0.0899	0.1898	0.3899	0.3800	0.5698	1	-0.1700	-0.5100
0.7100	0.3699	0.6078	0.4700	0.5394	0.7000	0.3699	0.3500	0.3100	0.1599	-0.1700	1	-0.0501
-0.4596	-0.4294	-0.5691	-0.6800	-0.7976	-0.0504	-0.7390	-0.6297	-0.6299	-0.9291	-0.5100	-0.0501	1

existe un valor propio negativo pero muy cercano a cero: -0.00001 . Sin embargo, al aplicar el mismo vector anterior de valores en riesgo individuales se tiene que el valor en riesgo es $\sqrt{328.366} = 573$.

En consecuencia, en el ejemplo la utilización de una aproximación de decimales inferior a cuatro dígitos en las correlaciones corregidas podría generar valores en riesgo incoherentes.

CONCLUSIONES

En este artículo se presentan dos metodologías simples para producir matrices de correlación bien definidas. Tanto el método de descomposición hiperesférica como el de descomposición espectral, son más generales que los desarrollos teóricos anteriores y computacionalmente más fáciles.

Las matrices de correlación propuestas por la Superintendencia Bancaria para la metodología estándar tienen problemas para el cálculo del VeR por no ser matrices de correlación válidas: una no era semidefinida positiva (o internamente consistente) y la otra contiene un elemento diferente de uno en su diagonal principal. Luego de corregirlas por cualquiera de los métodos presentados, es posible obtener correctamente una medida del VeR.

Así mismo, es importante tener en cuenta la aproximación decimal que se utilice en las correlaciones corregidas; en nuestro ejemplo, una inferior a cuatro dígitos podría generar valores en riesgo incoherentes.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alexander, C.O.; Leigh, C.T. (1997), "On the covariance matrices used in Value-at-Risk models", *Journal of Derivatives*, Vol. 4, Nº 3, pp. 50-62.
2. Berck, P.; Sydsæter, K. (1994), *Formulario para economistas*, 1ª ed., Editorial Antoni Bosh.
3. Brooks, Ch.; Walmsley, J. (1998), "Adjusting VaR models for the Impact of the Euro", *Working Paper*, Isma Centre, junio.
4. De Lara, A. (2002), *Medición y control de riesgos financieros*, 2ª ed., Editorial Limusa S.A.
5. Finger, Ch. (1997), "A methodology to stress correlations", *RiksMetrics Monitor*, Fourth Quarter, pp. 3-11.
6. Jorion, P. (2002), *Valor en Riesgo: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*, primera reimpresión, Editorial Limusa S.A.

7. Jorion, P. (2001), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd ed., McGraw-Hill.
8. Kupiec, P. (1998), "Stress testing in a Value at Risk framework", *Journal of Derivatives*, Fall, pp. 7-24.
9. Magnus, J.; Neudecker, H. (1995), *Matrix differential calculus with applications in statistic and econometrics*, John Wiley & Sons Ltd.
10. Murdoch, D. (1970), *Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc.
11. Rebonato, R.; Jäckel, P. (1999), "The most general methodology to create a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes", *Working Paper*, Quantitative Research Center of the NatWest Group, October.
12. Rodrigues, J.A. (2000), "The correlation matrix of the Brazilian Central Bank's standard model for interest rate market risk", *Working Paper Series*, Nº 6, Banco Central do Brasil, septiembre.
13. Vilariño, A. (2001), *Turbulencias financieras y riesgos de mercado*, Editorial Prentice Hall.