La medida del riesgo de los bonos

© Juan Mascareñas
Universidad Complutense de Madrid

Versión inicial: mayo 1991 - Última versión: **noviembre 06**

- *Teoremas de la valoración de los bonos, 2*
- *El concepto de "duración", 6*
- *La duración modificada como una medida de la volatilidad de los bonos, 9*
- *Las variables determinantes de la duración, 15*
- *Limitaciones del concepto de duración, 18*
- *La duración de una cartera de renta fija, 19*
- *El concepto de convexidad, 21*
- *La duración efectiva, 28*

1. Teoremas de la valoración de los bonos

Los cinco teoremas que vamos a estudiar a continuación hacen referencia a cómo varían los precios de los bonos en respuesta a las variaciones de su rendimiento hasta el vencimiento. El analista de los títulos de renta fija deberá conocer profundamente estas propiedades de los mismos debido a la importancia que ello tiene en la previsión de la variación del precio de mercado de los títulos con respecto a los cambios en los tipos de interés.

Recordemos, si el precio de mercado de un bono coincide con su valor nominal, entonces el rendimiento del mismo coincidirá con el tipo de interés del cupón. Ahora bien, si el precio de mercado es inferior (superior) a su valor nominal, el rendimiento hasta el vencimiento será mayor (menor) que el tipo de interés prometido por el emisor.

A continuación pasaremos a enunciar y comentar los cinco teoremas de la valoración de los bonos (en aras de una mayor simplicidad supondremos que el cupón se paga anualmente).

1.1 Teorema primero

Si el precio de mercado de un bono aumenta, entonces su rendimiento hasta el vencimiento deberá decrecer; o bien, si aquél descendiese, éste aumentará. Así pues, el rendimiento hasta el vencimiento del bono es una función inversa del precio de mercado.

El bono A tiene una vida de cinco años, un nominal de 100 euros, y paga anualmente el 10% de interés (10 euros). Si su precio de mercado es de 100 euros su rendimiento será, lógicamente, del 10%. Ahora bien, si el precio de mercado aumentase a 110 euros, su rendimiento caería hasta el 7,53%. O si aquél descendiese a 90 euros, su rendimiento crecería hasta situarse en el 12,83%. En la figura 1 se muestra la gráfica del precio del bono A según oscile el rendimiento entre el 0% y el 20% y como se aprecia la relación entre el precio y el rendimiento hasta el vencimiento de un bono tiene forma de curva *convexa*.

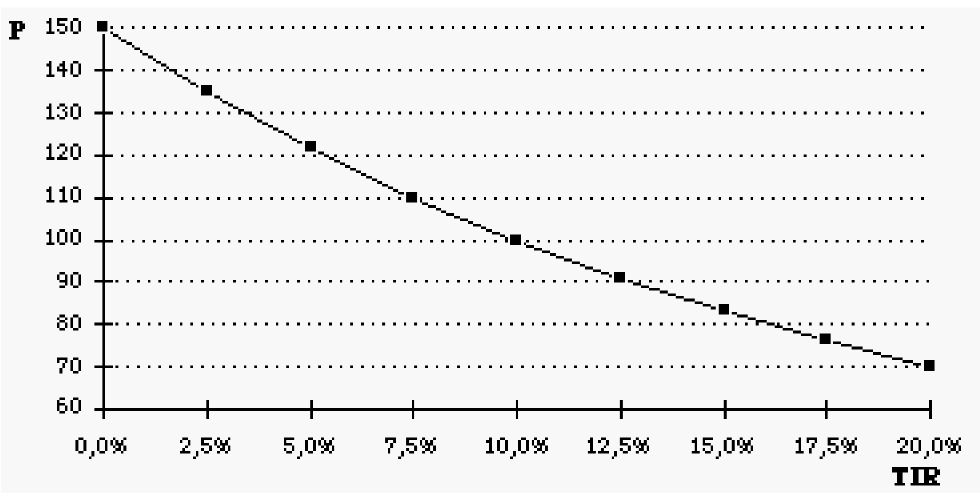

Fig. 1 La curva precio/rendimiento de los bonos ordinarios

1.2 Teorema segundo

Si el rendimiento de un bono no varía a lo largo de su vida, el tamaño de su descuento, o de su prima, descenderá conforme su vida se acorte.

Volvamos a estudiar el bono A suponiendo que el precio de mercado fuese de 110 euros, y su rendimiento se mantenga durante toda su vida en el 7,53%, la prima irá descendiendo tal y como se muestra en la tabla 1, conforme el bono se aproxime a su vencimiento.

Tiempo de vida	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Precio de mercado	110,00	108,26	106,42	104,43	102,29	100,00
Valor nominal	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Prima	10,00	8,26	6,42	4,43	2,29	0,00

Tabla 1

1.3 Teorema tercero

Si el rendimiento de un bono no varía hasta la fecha de su vencimiento, entonces el tamaño de su descuento, o de su prima, decrecerá a una tasa creciente conforme su vida se acorte.

Tiempo de vida	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Prima	10,00	8,26	6,42	4,43	2,29	0,00
Diferencia	-	-1,74	-1,84	-1,99	-2,14	2,29
Decremento	-	17,4%	22,3%	31,0%	48,3%	100,0%

Tabla 2

Si volvemos a observar el ejemplo del teorema anterior y construimos la tabla 2 basada en los decrementos de la prima veremos como efectivamente éstos aumentan cada vez más conforme la vida de la emisión se acerque a su término (véase también la figura 2).

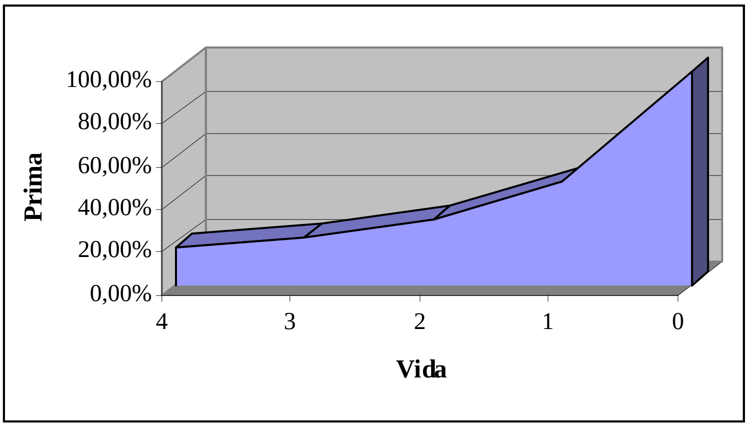

Fig.2

1.4 Teorema cuarto

Si el rendimiento del bono aumenta o desciende en la misma cantidad, la variación que producirá en su precio de mercado será mayor cuando éste último aumente (el rendimiento decrece) que cuando descienda (el rendimiento crece). La variación del precio es asimétrica.

El bono A cuyo rendimiento en el momento de su emisión es del 10%, el cual se corresponde con su precio de mercado inicial que es de 100 euros. Si el rendimiento asciende 100 puntos básicos, esto es, el 11%, el precio de mercado será de 96,30 euros. Pero si dicho rendimiento descendiese 100 puntos básicos, al 9%, el precio del bono sería de 103,89 euros. Como se aprecia el aumento del precio en este último caso es de 3,89 euros, algo superior, a los 3,70 euros de descenso de dicho precio en el primer caso. En la tabla 3 se muestra un ejemplo para más valores.

TIR	Precio	Diferencia	Variación
15%	83,94	233	2,70%
14%	86,27	318	3,55%
13%	89,45	334	3,60%
12%	92,79	351	3,64%
11%	96,30	370	3,70%
10%	100,00	389	3,74%
9%	103,89	410	3,80%
8%	107,99	431	3,84%

Tabla 3

Ahora bien, si la variación del rendimiento hasta el vencimiento fuese muy pequeña (unos pocos puntos básicos) el cambio del precio es prácticamente el mismo, sea cual sea la dirección de dicha variación. Así el rendimiento del bono A asciende un punto básico y se sitúa en el 10,01%, el precio del bono será de 99,9621 euros; mientras que si fuese del 9,99%, el precio alcanzaría el valor de 100,0379 donde podemos observar como en ambos casos la variación ha sido de 3,79 céntimos.

1.5 Teorema quinto

El porcentaje de variación en el precio del bono debido a un cambio en su rendimiento será menor cuanto mayor sea el tipo de interés del cupón. A esto se le denomina *efecto cupón*. Así que cuanto más grandes sean los cupones menor será la variación del precio; el caso opuesto es el del bono cupón-cero, cuyo precio es el que más varía ante los cambios habidos en los tipos de interés.

Si poseemos un bono denominado B con un nominal de 100 euros cinco años de vida y un tipo de interés del 12%, que tiene un precio de mercado de 107,58 euros, tendrá un rendimiento del 10% (lo mismo que el bono A). Si el rendimiento lo situáramos en el 11%, el precio de mercado sería de 103,70 euros, es decir, 3,88 euros menos que antes, lo que representa un 3,61% de descenso. Si hacemos lo mismo con el rendimiento del bono A situándolo en el 11%, veremos que su precio de mercado es de 96,30 euros, 3,70 euros menos que antes, es decir, un 3,70% lo que representa una variación relativa mayor.

Un ejemplo más desarrollado puede verse en la tabla 4. En ella tenemos el bono A cuyo valor nominal es de 100 euros y cuyo plazo de amortización es de 5 años. Dicho bono puede tener una serie de cupones como se observa en la primera columna. Calcularemos el precio intrínseco del bono para un rendimiento del 12% y el que tendría si aumentase tres puntos, es decir, el 15% (columnas dos y tres de la tabla), extraeremos la diferencia en euros de ambos precios (columna cuatro) y calcularemos su valor relativo dividiendo ésta última por el precio teórico inicial.

Cupón	**P(i=12%)**	**P(i=15%)**	**Dif.**	**Variac.(n=5)**	**Variac.(n=10)**
15 euros	110,81	100,00	10,81	9,75%	14,49%
12 euros	100,00	89,94	10,06	10,06%	15,05%
9 euros	89,19	79,89	9,30	10,42%	15,85%
6 euros	78,37	69,83	8,54	10,89%	17,05%
3 euros	67,55	59,77	7,78	11,52%	19,07%
0 euros	56,74	49,72	7,02	12,38%	23,23%

Tabla 4

Como podemos ver en la tabla 4, cuanto más pequeños son los cupones, mayores son las variaciones en los precios ante cambios en los tipos de interés. Por otro lado, la última columna de la derecha muestra el mismo estudio para un bono idéntico al A pero cuyo plazo de amortización es de 10 años. En éste caso, además de observarse el mismo proceso de aumento de las variaciones de los precios teóricos a medida que los cupones descienden de tamaño, podemos compararlo con el ejemplo del bono que tiene un plazo de cinco años, con ello observaremos que las variaciones en los precios del bono de mayor plazo son mayores que las del de menor plazo ante cambios en la ETTI. Es decir, cuanto mayor sea el plazo de vencimiento de un bono, mayor será la variación en el precio provocada por alteraciones en los tipos de interés.

La razón para la existencia del *efecto cupón* es que cuanto más pequeños sean los cupones, mayor será la parte del rendimiento total del bono que vendrá reflejada por el pago del último cupón más la devolución del principal en relación a los pagos de los otros cupones; incluso, a pesar de que lo que se compara es el valor actual de los pagos y que, por tanto, los cupones intermedios son descontados desde fechas más cercanas al momento de la adquisición del título que el último pago, lo que implica que la importancia relativa del principal es mayor cuando los cupones son más pequeños.

En efecto, el plazo "verdadero" es mayor para un bono con cupones pequeños que para uno que los tuviese mayores (el caso extremo sería un bono cupón-cero). Obsérvese en la tabla 4, como las variaciones en el precio son mayores tanto si el plazo de la emisión es más grande como si los cupones son más pequeños, ello se debe a que las emisiones que tienen plazos más cortos y/o cupones más altos proporcionan los flujos de caja esperados con mayor rapidez y, por lo tanto, su precio intrínseco oscila menos ante variaciones en los tipos de interés.

Resumiendo, imagínese que usted tiene dos bonos que tienen el mismo plazo y el mismo rendimiento pero uno de ellos es un cupón-cero y el otro paga los cupones por anualidades vencidas. Si el último día de la vida de ambos la institución emisora se declara en suspensión de pagos, usted no recibirá nada del bono cupón-cero, pero sí habrá recibido los cupones intermedios del otro bono, lo que quiere decir que ambos bonos aún teniendo el mismo plazo no se comportan de igual forma y la fecha de vencimiento no es tan definitoria como podría parecer. Esto nos lleva directamente a estudiar el concepto de *duración* como una forma de obtener una medida de ese plazo "verdadero" del que hablábamos en el párrafo anterior, que además nos va a proporcionar una medida del *riesgo del tipo de interés* de los bonos.

2. El concepto de "duración"

Para tratar con la ambigüedad del vencimiento de los bonos que realizan muchos pagos, necesitamos una medida del vencimiento medio de los flujos de caja prometidos que haga las veces de vencimiento efectivo del bono. Dicha medida también podría ser utilizada como un índice de la sensibilidad del precio del bono con relación a las variaciones de los tipos de interés puesto que, como hemos visto, dicha sensibilidad aumenta con el plazo del bono.

Una derivación del teorema quinto que acabamos de comentar consiste en que los bonos que tienen la misma fecha de vencimiento pero distintos tipos de interés nominales (cupones), pueden reaccionar de distinta forma ante un cambio en la estructura temporal de los tipos de interés. Sin embargo, los bonos que tengan una *duración* semejante reaccionarán de la misma forma.

El concepto de *duración* fue desarrollado por Frederick Macaulay[1] en 1938 y hace referencia al vencimiento promedio de la corriente de pagos de un bono. En realidad, estamos considerando al bono como una cartera formada por pagos individuales y dado que cuando calculamos el rendimiento de una cartera lo hacemos obteniendo la media ponderada de los rendimientos de los títulos que la componen, así el vencimiento de esta "cartera" se calcula obteniendo la media ponderada de los vencimientos de cada pago implicado en la misma. Las ponderaciones para cada período de tiempo **t** son iguales al valor actual de los flujos de tesorería en cada período de tiempo (intereses o principal multiplicados por sus factores de descuento respectivos) dividido por el valor actual del bono. La expresión matemática de la *duración*, en forma discreta, es:

[1] MACAULAY, Frederick: *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since 1856*. National Bureau of Economic Research. Nueva York. 1938

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t \times Q_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{Q_t}{(1+r)^t}} = \frac{1}{P_0} \times \sum_{t=1}^{n} \frac{t \times Q_t}{(1+r)^t}$$

donde $\mathbf{P_0}$ representa el precio de mercado del bono en la actualidad, $\mathbf{Q_t}$ es el flujo de caja del período (cupón más principal), **r** es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento y **n** el número de años hasta el vencimiento.

Para un bono del tipo cupón cero, la *duración* coincide con el plazo hasta su vencimiento (**n** años). Sin embargo, para un bono clásico parte de su valor actual se deriva de la corriente de los flujos de caja habidos antes de su vencimiento, lo que hace que su *duración* sea menor que el plazo hasta su vencimiento.

Supongamos un bono de nominal 1.000 € con un plazo de vencimiento situado en cinco años, que paga un 7% de interés anual al final de cada año y se le estima un rendimiento anual del 8% hasta su vencimiento. En la tabla 5, se muestra el cálculo de la *duración* del bono; en ella aparecen los flujos de caja, el factor de descuento (que nos permite calcular el valor actualizado de los flujos de caja), el valor actual de cada flujo, el resultado de multiplicar éste último por el período en el que se encuentra y la proporción del valor actual de cada flujo con relación al precio intrínseco del bono.

Períodos (t)	Flujos de Caja	Factor de Descuento	Valor Actual	V.A. x t	Pesos
1	70	0,9259	64,815	64,815	6,75%
2	70	0,8573	60,014	120,028	6,25%
3	70	0,7938	55,568	166,704	5,79%
4	70	0,7350	51,452	205,808	5,36%
5	1.070	0,6806	728,224	3.641,120	75,85%
		$\mathbf{P_0}$ **=**	**960,073**	4.198,475	

Tabla 5

Si ahora dividimos la suma de la columna representativa del valor actual ponderado: 4.198,475 entre el precio teórico del bono: 960,073 € obtendremos el valor de la *duración*: 4,373 años. Como se aprecia hay una diferencia de 0,627 años con relación a la vida de la emisión, que es debida a que parte de los flujos de tesorería se reciben antes del vencimiento de la misma.

En la columna de la derecha de la tabla 5 se muestra el porcentaje del valor actual que se obtiene cada vez que recibimos un flujo de caja. Así, cuando obtengamos el primero habremos obtenido el 6,75% del valor actual total de la emisión (que, recordemos, es de 960,073 euros), en el momento de obtener el segundo flujo obtendremos un 6,25% más de dicho valor y así sucesivamente. Por lo tanto, hay unos flujos que son más importantes de recibir que otros, debido a la parte que se recupera del valor actual de la emisión. Es decir, si obtenemos el último flujo de caja cuyo valor nominal es de 1.070 euros pero que tiene un valor actual de 728,224 euros lo que representa un 75,85% del valor de la emisión, habremos conseguido más del setenta y cinco por ciento de su valor. Por ello, cada período tiene una importancia distinta para el inversor, la cual dependerá del peso que tenga el valor real del flujo prometido en relación al valor actual de la emisión. Esto es lo que hace que si queremos obtener la *duración* de una emisión debamos calcular la media de los diversos períodos de tiempo sobre los que se extiende la misma, ponderados por su importancia con arreglo al valor actual de los flujos de caja que cada uno de ellos proporciona.

Otra forma de entender la *duración* de un bono es la de que indica el plazo hasta el vencimiento de su bono cupón cero equivalente, es decir, si capitalizamos los 960,073 euros del precio actual del bono al 8% durante 4,373 años obtendremos un valor final de 1.344,21 euros, que mostraría el precio final del bono cupón-cero que tiene la misma *duración* que el analizado en la tabla 5.

Otra forma de entender el concepto de *duración* es verla como el fiel de una balanza que se encuentra en equilibrio y en cuyo plato figuran los valores actuales de los flujos de caja prometidos por un bono. Las distancias que separan las masas a pesar (flujos de caja actualizados) son proporcionales a los plazos existentes entre los respectivos flujos y los pesos de las masas son proporcionales a sus valores actuales. El centro de gravedad de este sistema viene dado por la *duración* (véase la figura 3 donde se muestra el ejemplo de la tabla 5).

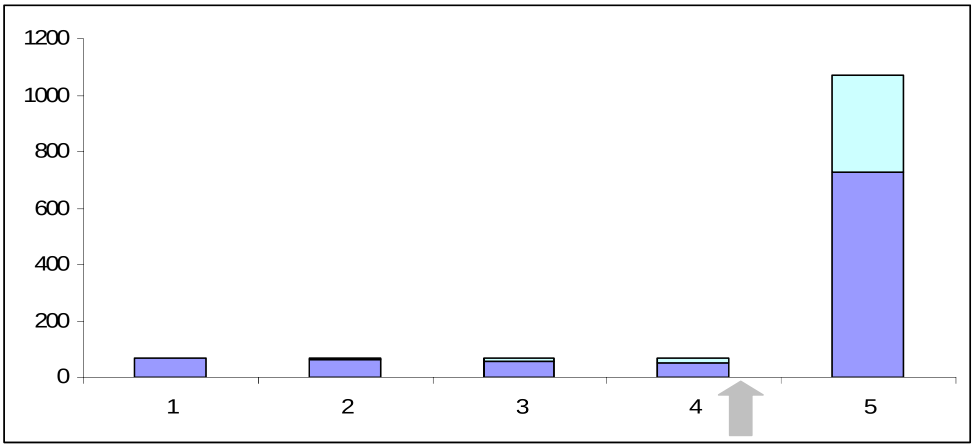

Fig. 3 El fiel de una balanza como símil de la *duración* de Macaulay

La razón por la que el concepto de *duración* ha reemplazado al de *madurez* (definido éste como plazo de tiempo hasta el vencimiento) como una medida de la longitud de la corriente de pagos, radica en que ésta última se refiere al instante del tiempo en que tiene lugar el último pago del empréstito, ignorando completamente el momento y la magnitud del resto de los pagos que van a ser efectuados desde el momento actual hasta su vencimiento. Por ello, la *duración* es una medida mucho más exacta de la longitud media del tiempo en la que el inversor espera obtener su dinero en una inversión en bonos.

El procedimiento de cálculo de la *duración* a través de la media ponderada, que hemos visto en los párrafos anteriores, puede resultar tedioso. Por ello han surgido expresiones matemáticas que permiten calcular el valor de la *duración* de los bonos con mayor rapidez. Una de esas expresiones calcula el valor de la *dura-*

ción (**D**) de la siguiente forma (siempre que los períodos de tiempo entre cupones sean un número entero, es decir, que no haya un cupón corrido).

$$D = \frac{1 + r}{r} - \frac{n(c - r) + (1 + r)}{c(1 + r)^n - (c - r)}$$

Donde **r** es el rendimiento hasta el vencimiento del bono durante el período considerado (anual o semestral, por lo general); **n** es el número de períodos (años o semestres) que restan hasta la fecha de maduración del bono y **c** es el tipo de interés nominal del cupón. Así, por ejemplo, en el caso anterior **r** es el 8% anual; **c** es el 7% anual; **n** es cinco años.

$$D = \frac{1 + 0{,}08}{0{,}08} - \frac{5(0{,}07 - 0{,}08) + (1 + 0{,}08)}{0{,}07(1 + 0{,}08)^5 - (0{,}07 - 0{,}08)} = 4{,}373 \text{ años}$$

3. La *duración modificada* como una medida de la volatilidad de los bonos

Cuando hablamos de *volatilidad* de los bonos u obligaciones nos estamos refiriendo a la sensibilidad de su precio de mercado con relación a los cambios que se produzcan en el tipo de interés. Así que la podemos definir como la variación que se produce en el precio del bono con respecto a un incremento (o decremento) de cien puntos básicos (1%) del rendimiento hasta el vencimiento del mismo.

Supongamos que tenemos un bono de nominal 1.000 €, con un plazo de vencimiento situado dentro de cinco años, que paga un 7% de interés anual al final de cada año (70 euros por cupón) y se le estima un rendimiento anual del 8% hasta su vencimiento. ¿Cuál sería su precio teórico con arreglo a estos datos? y ¿cuál sería su precio teórico si el tipo de rendimiento desciende un 1%?.

El precio teórico si el rendimiento es del 8% será:

$$P_0 = \frac{70}{1{,}08} + \frac{70}{(1{,}08)^2} + \frac{70}{(1{,}08)^3} + \frac{70}{(1{,}08)^4} + \frac{1.070}{(1{,}08)^5} = 960{,}07 \text{ €}$$

Por otra parte si el tipo de interés del mercado desciende un 1% y se sitúa en el 7% el precio teórico tomará un valor de:

$$P_0 = \frac{70}{1{,}07} + \frac{70}{(1{,}07)^2} + \frac{70}{(1{,}07)^3} + \frac{70}{(1{,}07)^4} + \frac{1.070}{(1{,}07)^5} = 1.000 \text{ €}$$

Si ahora, calculamos cuanto varía porcentualmente el precio ante la anterior variación del 1% en el tipo de interés obtendremos un valor de:

[1.000 - 960,07] ÷ 960,07 = 0,04159 = 4,159%

Si, por el contrario, el tipo de interés del mercado hubiese aumentado en 1%, situándose en el 9%, el precio del bono habría descendido hasta valer 922,2 euros, lo que representaría una variación porcentual igual a:

$$[922{,}2 - 960{,}07] \div 960{,}07 = -0{,}039445 = -3{,}9445\%$$

Si ahora calculamos el valor medio de los valores absolutos de ambas variaciones relativas obtendremos un valor promedio igual a 4,05175%. Cifra que indica el riesgo de interés del bono (es decir, cuánto variará el precio teórico del bono ante una variación porcentual del tipo de interés del ±1%).

Para conectar los conceptos de *volatilidad* y *duración* deberemos echar mano de la denominada *duración modificada* (D*), que se obtendrá haciendo:

$$D^* = \frac{D}{1+r}$$

donde **D** representa la *duración* y **r** el tipo de rendimiento anual hasta el vencimiento[2].

Si ahora mostramos la ecuación representativa de la volatilidad del bono, con arreglo a la definición que utilizábamos unos párrafos más arriba, veremos que es aproximadamente igual a la *duración modificada*.

$$D^* \approx -\frac{(P_1 - P_0)/P_0}{(r_1 - r_0)} = -\frac{\Delta P / P_0}{\Delta r}$$

donde P_0 indica el precio del bono antes del cambio del rendimiento; P_1 el precio del bono después de variar aquél; y Δr_0 es la variación del rendimiento que será igual a 100 puntos básicos. Si en la ecuación anterior sustituimos la *duración modificada* (**D***) por la *duración* de Macaulay (**D**) y despejamos su valor, el resultado será:

$$D \approx -\frac{(P_1 - P_0)/P_0}{(r_1 - r_0)/(1 + r_0)} = -\frac{\Delta P / P_0}{\Delta r}(1 + r_0)$$

Así, por ejemplo, la *duración modificada* del ejemplo mostrado en la tabla 5 será igual a 4,373 ÷ 1,08 = 4,049%, cifra que viene a ser muy parecida a la de la volatilidad –4,05175%- calculada unos párrafos más arriba (obsérvese que la *duración modificada* se expresa en tanto por ciento, y no en unidades de tiempo). Para variaciones muy pequeñas del rendimiento se puede mostrar como la *duración modificada* coincide con nuestra definición de volatilidad del bono u obligación. Para cambios mayores de 50 puntos básicos, lo anterior sólo es aproximadamente cierto.

---

[2] El caso general sería: $D^* = \dfrac{D \text{ en años}}{(1 + \frac{r}{m})}$ donde m indica el número de cupones que se pagan cada año (m=2 para los semestres, p.e.). Aunque, es una práctica común entre los gestores de fondos que tienen bonos con cupones semestrales, trimestrales, etcétera, calcular la *duración modificada* dividiendo la *duración* de Macaulay (en años) por 1 más la tasa de rendimiento hasta el vencimiento dividida por dos (r/2).

La razón de que no coincidan exactamente los valores de la volatilidad y de la *duración modificada* estriba en que ésta última está basada en la derivada de P_0 con respecto al rendimiento (dP_0/dr), y las derivadas se refieren a cambios infinitesimales de las variables. De esta manera podemos ver como la *duración* es, además de una medida del "plazo" del bono, una medida de la volatilidad del mismo. De hecho, cuanto mayor sea la *duración*, mayor será la volatilidad del bono.

A continuación se muestra como la *duración modificada* es en realidad la derivada del precio con respecto al rendimiento (dP_0/dr) dividido por el precio inicial (P_0). Para ello haremos que la variación del rendimiento tienda a ser infinitesimal lo que implicará la utilización de la derivada. Seguidamente calcularemos ésta última y procederemos, finalmente, sustituyendo los valores obtenidos a demostrar que la *duración modificada* se basa en la derivada del precio con respecto al rendimiento.

$$D^* \approx -\frac{(P_1 - P_0)/P_0}{(r_1 - r_0)} = -\frac{\Delta P / P_0}{\Delta r} \rightarrow \frac{dP/P_0}{dr} = \frac{dP}{dr} \times \frac{1}{P_0}$$

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{J=1}^{n} \frac{-j\, Q_j}{(1+r)^{j+1}} = \frac{1}{(1+r)} \sum_{j=1}^{n} \frac{-j\, Q_j}{(1+r)^j}$$

$$D^* = \frac{1}{P_0} \times \frac{dP}{dr} = \frac{1}{P_0} \times \frac{1}{(1+r)} \sum_{j=1}^{n} \frac{-j\, Q_j}{(1+r)^j} = \frac{D}{(1+r)}$$

Como ya hemos señalado anteriormente, la volatilidad es el porcentaje de variación en el precio por unidad de variación en el rendimiento. La volatilidad es negativa, lo que indica que a un aumento del rendimiento le seguirá un descenso en el precio, es decir, que ambas variables están relacionadas inversamente entre sí.

$$\%\ \text{variación en el precio} = -\,D^* \times \frac{r_1 - r_0}{100}$$

Concretando, el precio de los bonos está inversamente relacionado a su rendimiento; la *duración modificada* actúa como un multiplicador dado que cuanto más grande sea, mayor será el impacto en el precio de los bonos ante un cambio de los tipos de interés; y, por último, para una *duración modificada* determinada, cuanto mayores sean las variaciones en el tipo de interés, mayor será el porcentaje de cambio en el precio.

3.1 La *duración* en euros y el valor del punto básico (VPB)

El producto de la *duración modificada* (expresada en tanto por uno) y el precio del bono se denomina *duración en euros*, que indica cuanto asciende (desciende) el valor del bono medido en euros cuando el rendimiento desciende (asciende) 100 puntos básicos[3], es decir, es la derivada parcial del precio del bono con respecto al rendimiento. Su principal ventaja es que es aditiva, esto es, la *duración en euros* de

[3] A la *duración en euros* también se la denomina *riesgo del precio*.

una cartera es igual a la suma algebraica de la *duración en euros* de los activos que la componen (siempre que la estructura temporal de los tipos de interés sea plana).

Si, por ejemplo, queremos calcular la *duración en euros* de un bono cuyo valor nominal y de mercado es actualmente de 100 euros, que paga un cupón anual del 10% durante 15 años y cuya *duración modificada* es del 7,606%, no tendremos más que hacer la siguiente operación:

$$D^* € = 100 \times (- 7{,}606) \times 0{,}01 = - 7{,}606 €$$

lo que quiere decir que si el tipo de interés asciende (desciende) 100 puntos básicos el bono se deprecia (aprecia) en 7,606 euros.

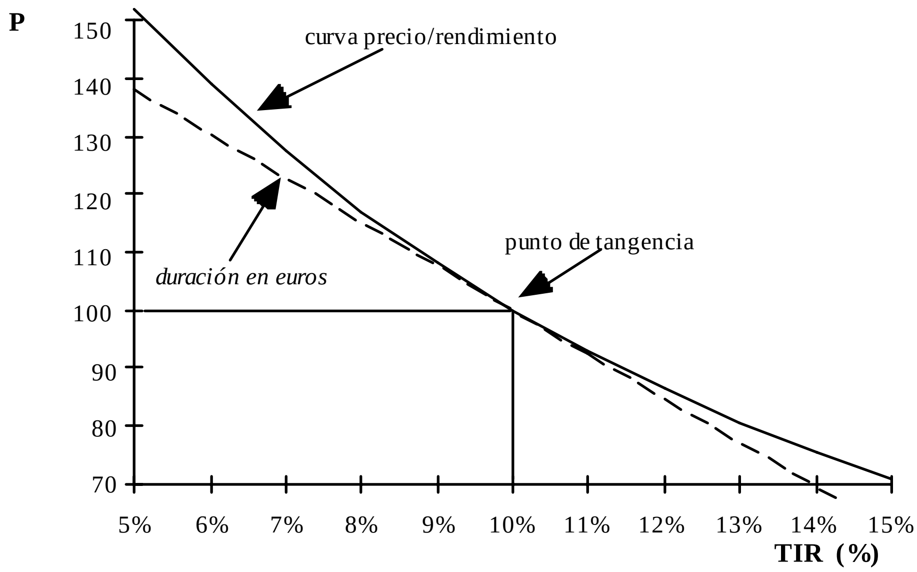

Fig. 4 Representación gráfica de la *duración en euros* y de la curva precio/rendimiento

En la figura 4 se muestra un gráfico de la curva precio/rendimiento de dicho bono y de su valor estimado a través de la *duración en euros*. Esta última es tangente a aquélla para una TIR hasta el vencimiento determinada, es decir, muestra la pendiente de la curva para dicho valor de los tipos de interés (o lo que es lo mismo la dP/dr). A una mayor pendiente de la curva le corresponderá una mayor *duración modificada* y lo contrario. Lo que en realidad se ha hecho es sustituir la curva por la recta representativa de la *duración en euros* (el error cometido se denomina *convexidad* y será analizado en un epígrafe posterior), de esta forma es mucho más rápido calcular el efecto que una variación en el tipo de interés del mercado produce en el valor del bono. Además, como sabemos la recta representativa de la *duración en euros* puede sustituir a la curva representativa de la relación precio-rendimiento cuando el tipo de interés varía unos pocos puntos básicos (normalmente no más de 50 pb.) puesto que ambas prácticamente se confunden.

Por otra parte, el valor del punto básico (VPB) es una medida del riesgo de interés alternativa a la de la *duración en euros*, que se define como la variación en el precio teórico de un bono inducida por la oscilación de un punto básico en su rendimiento. El VPB se expresa en euros. Así:

$$VPB = - P_0 \times D^* \times 0{,}0001$$

El VPB, por tanto, expresa la sensibilidad en euros del precio con relación al rendimiento y además también tiene la propiedad aditiva (en realidad, el VPB es igual a la *duración en euros* dividida por 100). Por ejemplo, si la D* del bono del ejemplo anterior era de 7,606 el VPB será:

$$VPB = 100\text{ €} \times (-7{,}606) \times 0{,}0001 = - 0{,}0761\text{ €}$$

lo que quiere decir que si el rendimiento del bono asciende (baja) un 0,01% el precio del mismo caerá (subirá) 7,61 céntimos de euro.

Veamos otro ejemplo, supongamos que poseemos dos bonos de diferente vencimiento: el bono C cotiza a la par, tiene un vencimiento de dos años y paga un cupón anual del 8%; el bono L cotiza a la par, tiene un vencimiento a quince años y paga un cupón anual del 8%. Ambos tienen un rendimiento del 8% anual puesto que cotizan a la par. La *duración* del bono C es de 1,926 años, mientras que su *duración modificada* es del 1,783%; por otra parte, el bono L tiene una *duración* de 9,245 años y una *duración modificada* del 8,56%.

La *duración en euros* de ambos es respectivamente de 1,783 euros para C y de 8,56 euros para L (asumiendo un valor nominal de 100 euros). Mientras que su VPB es de 0,0178 para C y de 0,0856 para L.

Los operadores deben considerar el coste de financiar una posición determinada. Si el *coste de mantenimiento* (*cost of carry*) es negativo, lo que quiere decir que cuesta dinero mantener una posición, el operador querrá mantener la posición más pequeña posible. Así, el riesgo sobre los beneficios de tener invertidos 48.000 euros en bonos C es igual al de poseer una inversión de 10.000 en bonos L. Si el operador espera que el rendimiento de ambos bonos descienda en igual magnitud, deberá posicionarse en el bono L porque ganará más euros si eso ocurre.

Para los inversores que pagan dinero por sus bonos, las emisiones de alta *duración* proporcionan la oportunidad de realizar apuestas mayores; los precios de este tipo de emisiones son más sensibles a los cambios en el rendimiento que los precios de los bonos de inferiores *duraciones*. A algunos inversores les gusta apalancar sus apuestas y, por tanto, están dispuestos a pagar una prima por emisiones de alta *duración* como los bonos cupón cero. Como resultado de todo esto, las emisiones de *alta duración* a menudo se negocian con rendimientos inferiores a los de las emisiones de *baja duración* y plazos similares.

3.2 La *duración* de los bonos con cupones variables (FRN)

Los bonos con cupones variables, o FRN, son aquellos cuyos cupones se adaptan al valor de mercado de los tipos de interés. Por tanto, cualquier variación en el rendimiento produce una alteración en el tipo de interés del cupón que se recibirá dentro de seis meses. La única variación del precio del bono se puede deber a que durante el período de seis meses que resta hasta el siguiente pago del cupón, el tipo de interés varíe, en todo caso, el impacto en el precio es muy pequeño (su *duración modificada* está próxima a cero).

Una vez que se ha establecido el nuevo cupón, el FRN se comporta como un bono ordinario con cupones fijos con vencimiento inferior a un semestre (si paga cupones semestrales). Concretemos, digamos que queda para su vencimiento una fracción **w** de un período semestral, entonces la relación entre el precio del bono y su rendimiento (r) es la siguiente (donde C es el cupón semestral y 100 es el valor nominal del bono):

$$P = \frac{Cw + 100}{(1 + r/2)^{w}}$$

calculando la primera derivada con respecto a **r** y, posteriormente, dividiendo por P obtendremos su *duración modificada*, que es igual a:

$$D^{*} = \frac{1}{P} \text{ x } \frac{-(Cw + 100)\, w}{2(1 + r/2)^{w+1}} = \frac{(1 + r/2)^{w}}{Cw + 100} \text{ x } \frac{-(Cw + 100)\, w}{2(1 + r/2)^{w+1}} = \frac{-w}{2(1 + r/2)}$$

Por tanto, el bono con cupón variable cada seis meses tendrá una *duración* inferior a un semestre, es decir, su precio no es especialmente sensible a las variaciones del rendimiento.

Veamos un ejemplo, supongamos que tenemos un bono de 1.000 euros de nominal que paga cupones variables semestrales de 35 euros. El tipo de interés nominal anual actual es del 6%. Si quedan tres meses exactos para el siguiente cupón (w = 0,5), el precio será igual a:

$$P_0 = \frac{Cw + 1.000}{(1 + r/2)^{w}} = \frac{35 \text{ x } 0,5 + 1.000}{(1 + 0,06/2)^{0,5}} = 1.002,57 \text{ euros}$$

Y su *duración modificada* será igual a:

$$D^{*} = \frac{-w}{2(1 + r/2)} = \frac{-0,5}{2\,(1 + 0,06/2)} = -0,2427\%$$

Efectivamente, si el tipo de interés ascendiese súbitamente al 7% nominal anual, el valor actual del bono sería de 1.000,15 euros, un 0,2416% menos que antes; y, si el tipo de interés cayese al 5%, el precio se situaría en 1.005,01 euros, un 0,24386% mayor. El valor medio de ambas variaciones será de 0,24273%, que coincide con el valor de la *duración modificada* obtenida.

3.3 La *duración* de un bono entre dos fechas de pago del cupón.

Por desgracia, cuando es necesario calcular la *duración modificada* de un bono casi siempre será en una fecha que no coincide exactamente con la del pago del cupón. Esto nos lleva a mostrar la fórmula de la *duración modificada* a utilizar en ese momento:

$$D^{*} = \frac{1}{(1+r)^{1-f}\ P_0}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-f)\ FC_j}{(1+r)^{j}}\right]$$

donde **r** es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento, **f** es el tanto por uno del tiempo transcurrido desde la fecha de pago del último cupón (0,5 si los cupones se pagan anualmente y han transcurrido seis meses), $\mathbf{P_0}$ es el precio actual del bono en el mercado (con *cupón corrido* incluido) y **n** es el plazo que resta hasta el vencimiento del bono.

El lector se habrá dado cuenta de que esta expresión es realmente la expresión general de la *duración modificada* porque si f=0 lo que tenemos es la expresión que hemos estado manejando a lo largo del epígrafe 3.

3.4 La expresión de la *duración* en tiempo continuo

En los epígrafes anteriores hemos estado trabajando en tiempo discreto a través del tipo de interés compuesto. Sin embargo, en este subepígrafe vamos a ver la expresión de la *duración* en tiempo continuo. Para ello lo primero es ver la expresión que calcula el precio de un bono en este contexto:

$$P_t = P_n\ e^{-r\,(n-t)} + \sum_{j=1}^{n} FC_j\ e^{-r\,(t_j-t)}$$

donde $\mathbf{P_n}$ es el precio de reembolso del bono en la fecha de amortización del mismo (**n**), **r** es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento, **t** indica el instante en el que se calcula el precio, FC_j es el flujo de caja del período, y **e** es el famoso número 2,718281828.

Si extraemos la primera derivada con respecto a **r** obtendremos la pendiente de la curva precio/rendimiento para la tasa de rendimiento **r**, y si a este valor le dividimos por el precio actual del bono obtendremos el valor de la *duración*

$$\frac{dP_t}{dr}\ \frac{1}{P_t} = \left[-(n-t)\ P_n\ e^{-r\,(n-t)} + \sum_{j=1}^{n}(t_j - t)\ FC_j\ e^{-r\,(t_j-t)}\right]\frac{1}{P_t}$$

La *duración modificada* sólo se puede calcular en tiempo discreto.

4. Las variables determinantes de la *duración*

Las variables que determinan la *duración* de un bono y, por extensión, su volatilidad o riesgo de interés son siete: el cupón, el plazo hasta el vencimiento, el cupón corrido, el rendimiento del bono, la amortización parcial de la emisión, la amortización anticipada de la emisión y el paso del tiempo.

El cupón. La *duración* y el tipo de interés pagado a través del cupón están inversamente relacionados, pues a mayor tipo de interés menor *duración*. Esto es fácil de ver pues cuanto mayor sea el cupón, el propietario del bono recibe una cantidad mayor, relativamente hablando, de flujos de caja en los primeros años de la vida del bono (tanto por el mayor volumen en euros recibido, como porque el proceso de descuento tiene un menor efecto sobre los primeros flujos de caja), lo cual disminuye la *duración*. También cuanto mayor sea la frecuencia de pago de los cupones, menor será la *duración* de la emisión. Por otro lado, cada vez que se paga un cupón la duración aumenta.

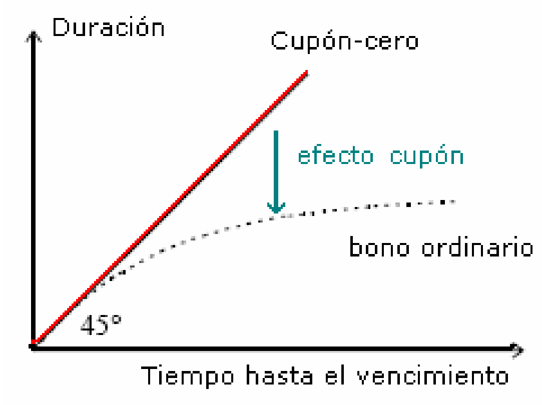

Fig.5 El efecto cupón

El plazo hasta el vencimiento. Por regla general, cuanto mayor sea el plazo hasta el vencimiento, mayor será la *duración* y mayor la volatilidad del bono. Es lógico, puesto que cuanto más se tarde en llegar a la fecha de vencimiento del bono mayor será el riesgo de dejar de cobrar algún cupón y más tendremos que esperar a cobrar los cupones que nos faltan. Esta relación no es lineal ya que la tasa de crecimiento de la *duración* va disminuyendo conforme aumenta el plazo de vencimiento. Aún más, esta regla no se cumple cuando los cupones son bajos, el plazo de la emisión es muy grande y su precio es inferior a la par (véase la figura 6). Por lo tanto, al invertir en bonos a muy largo plazo no se asume un aumento sustancial del riesgo de interés por elegir los bonos de mayor vencimiento, lo que no ocurre en los bonos a corto y medio plazo, donde sus diferenciales de riesgo (*duración*) son mayores.

Por otro lado, los bonos perpetuos tienen una *duración* cercana al inverso del rendimiento del bono hasta su vencimiento, sin importar cuál sea el cupón. Así, por ejemplo, un bono perpetuo que tenga un rendimiento esperado del 8%, tendrá una *duración* de 13,5 años (D = [1+r]/r). Esto es importante, puesto que se puede considerar a las acciones preferentes como un tipo de bono perpetuo cuya *duración* será igual a la inversa de su rendimiento actual.

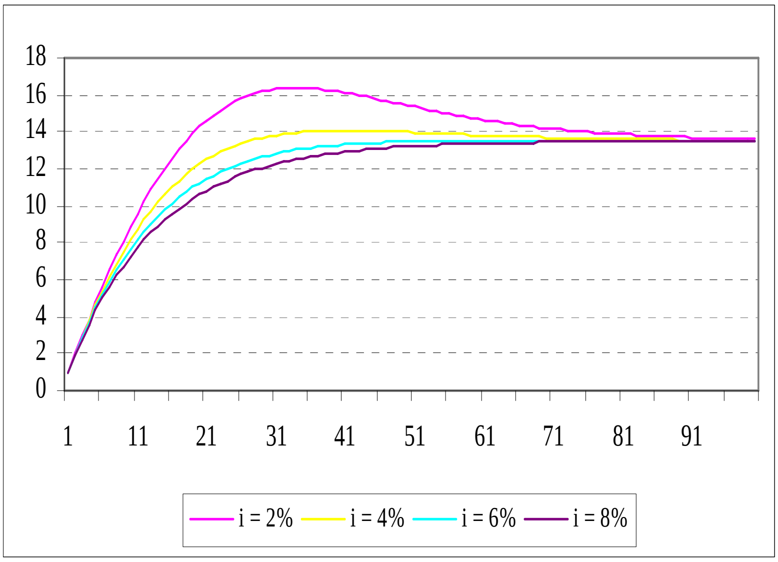

Fig.6

En la tabla 6 se muestra el cálculo de la *duración* realizada por Fisher y Weil para una serie de cupones y de plazos sobre una obligación que paga un 8% de interés nominal por semestres vencidos. En dicha tabla se aprecia como a medida que aumenta el plazo hasta el vencimiento también lo hace la *duración* hasta un período determinado en el caso de los bonos emitidos con descuento (**i**<8%). En todo caso, la cifra a la que tiende el valor de la *duración* es la proporcionada por el bono perpetuo[4] (13 años, en este ejemplo). También puede observarse como la *duración* desciende cuando el valor del cupón aumenta.

	Cupón			
Plazo	**i = 2%**	**i = 4%**	**i = 6%**	**i = 8%**
1	0,995 años	0,990 años	0,985 años	0,981 años
5	4,742	4,533	4,361	4,218
10	8,762	7,986	7,454	7,067
20	14,026	11,966	10,922	10,292
50	14,832	13,466	12,987	12,743
100	13,097	13,029	13,006	12,995
∞	13,000	13,000	13,000	13,000

Tabla 6. *Duración* para los bonos que rinden un 8% (cupones semestrales)

El cupón corrido. Cuando un bono es adquirido o vendido entre dos fechas consecutivas de pago del cupón, se encuentra sujeto al pago o cobro de un cupón corrido al que tiene derecho. De tal manera que el precio del título no sólo es el que aparece en su cotización sino que hay que incluirle esa parte del cupón al que tiene derecho el vendedor. Como el cálculo de la *duración* incorpora este precio global,

[4] Fisher y Weil han utilizado la expresión matemática del cálculo de la *duración* mostrada al final del epígrafe 2. El valor al que tiende la *duración* cuando el plazo es muy grande viene dado por el primer sumando de dicha expresión (1+r) ÷ r

ésta se encuentra relacionada inversamente con dicho cupón corrido. Es decir, un bono que tenga un cupón corrido tendrá una *duración* más pequeña que otro semejante que carezca del mismo, debido a que en cuanto el inversor reciba el primer cupón al que tiene derecho va a ver reembolsado el cupón corrido que tuvo que pagar al vendedor en el momento de la adquisición del título.

El rendimiento hasta el vencimiento. Existe una relación inversa entre la *duración* (y la volatilidad del precio del bono) y el tamaño del rendimiento hasta el vencimiento. Así que a mayor rendimiento, menor *duración* y volatilidad. Esto es así, debido a que el rendimiento hasta el vencimiento (**r**) es la tasa de descuento utilizada en la determinación del valor actual del bono y cuando aquél aumenta, desciende el valor actual de los flujos más lejanos en el tiempo, tanto en valor absoluto como relativo. Por ello, las ponderaciones de estos flujos se reducen y la *duración* se aleja del momento del vencimiento, es decir, desciende. Curiosamente, cuando los tipos de interés descienden y la *duración* aumenta se está diciendo que en un mercado de bonos alcista (los precios aumentarían al descender los rendimientos) la volatilidad de los precios con relación a dichos tipos de interés es mayor que en uno bajista. Observe que cuando varían los tipos de interés, no varía el vencimiento de la emisión pero sí su *duración*.

La amortización parcial de la emisión. Cuando un bono puede ser amortizado antes de su vencimiento, porque pertenece a una emisión que va a ser amortizada parcialmente, verá reducirse su *duración* en comparación con la de otros bonos semejantes que no tengan dicha posibilidad. La posibilidad del reembolso anticipado del bono reduce el vencimiento promedio de los flujos de caja del mismo, así como el número de éstos, todo lo cual producirá un acortamiento de la *duración*.

La amortización anticipada de la emisión. Por la misma razón que en el caso anterior la *duración* del bono se verá acortada si la empresa emisora tiene la posibilidad de amortizar completamente la emisión antes de su fecha de vencimiento.

El paso del tiempo. Como parece lógico conforme va transcurriendo el tiempo, la *duración* se va acortando. Esto es debido a que el último flujo de caja, el que contiene el reembolso del principal, es el flujo de mayor calibre de toda la inversión por lo que ejerce su fuerza de atracción sobre la *duración*, que se aproxima cada vez más rápidamente hacia el mismo. En el caso de los bonos cupón cero esta tasa es constante puesto que sólo hay un pago, el último.

5. Limitaciones del concepto de *duración*

Hay, al menos, cuatro limitaciones a la utilización de la *duración* como medida del riesgo de una cartera de renta fija.

Primero, la *duración* hace referencia únicamente al riesgo asociado con los cambios en los tipos de interés. Esto es, no refleja los cambios en el precio de mercado del bono procedentes de alteraciones en la corriente de los flujos de caja esperados; lo que puede suceder cuando el bono es convertible, o porque exista la posibilidad de ser amortizado anticipadamente por la empresa[5], o porque el riesgo de insolvencia de la empresa ha aumentado, etc.

Segundo, la *duración* se limita a medir exclusivamente la relación existente entre los cambios habidos en el rendimiento hasta el vencimiento. Lo que quiere decir que indica el porcentaje de cambio entre una estructura de tipos de interés plana y otra que tienda a crecer o a decrecer de forma paralela. Como es lógico, la ETTI no es plana y los cambios habidos en la misma no son paralelos.

Tercero, si bien es cierto que el precio de mercado de las emisiones de deuda con una *duración* mayor es más sensible que el precio de las emisiones con menor *duración*, ante un cambio dado en el rendimiento esperado hasta su vencimiento, también es verdad que el rendimiento de las emisiones de menor *duración* es más volátil que el de las de mayor (el rendimiento de las Letras del Tesoro, por ejemplo, suele ser más volátil que el rendimiento de las obligaciones del Estado). Esto último no lo refleja el concepto de *duración* y a la hora de valorar el riesgo final de la emisión es necesario tener en cuenta conjuntamente ambos factores.

Cuarto, es relativamente fácil medir la *duración* de los bonos pero es bastante más complejo medir la de otras inversiones como las acciones ordinarias[6], por ejemplo. Ello limita las posibilidades de valorar el riesgo de una cartera mixta formada por títulos de renta fija y variable a través del uso de la *duración*.

6. La *duración* de una cartera de renta fija

Una cartera de bonos no deja de ser una corriente de flujos de tesorería que se espera obtener a lo largo del tiempo. Por lo tanto su *duración* se medirá a través de la media ponderada del vencimiento de los flujos de caja de la cartera, utilizando como ponderación los valores actuales de dichos flujos. Como se aprecia, el sistema de cálculo es el mismo que para activos individuales con la única diferencia de que la misma es un conjunto de cupones con diferentes vencimientos y que, además, el rendimiento interno de la cartera, que es el que se utiliza para actualizar los flujos de caja, no coincide con el rendimiento medio ponderado de los rendimientos hasta el vencimiento de cada uno de los títulos que la componen.

En la tabla 7 se muestra una cartera formada por cuatro títulos con diferentes vencimientos (tres, cinco, diez y quince años), que pagan distintos tipos de interés, que tienen distintos precios de mercado, distintas TIR hasta el vencimiento, diferentes *duraciones* normales (D) y modificadas (D^*) y diferentes ponderaciones dentro de la cartera (según el porcentaje de su valor de mercado en el valor actual de la cartera).

[5] El concepto de *duración efectiva* hace referencia precisamente a este caso.

[6] Sobre la *duración* de las acciones ordinarias véase FERRER, Román (1994): "Modelos de Valoración del Riesgo de Interés de los Títulos de Renta Variable". *Actualidad Financiera* nº 44. Págs.: 623-654

Títulos	Número	Cupón	Plazo	Precio	TIR	D	D*	Valor Mercado	% Cartera
A	200	7,0%	3	102,00 €	6,25%	2,81	2,64	20.399,10 €	20%
B	250	7,4%	5	102,26 €	6,85%	4,36	4,08	25.566,05 €	24%
C	300	7,8%	10	105,26 €	7,05%	7,37	6,89	31.576,66 €	30%
D	250	8,0%	15	107,95 €	7,12%	9,47	8,84	26.988,64 €	26%
								104.530,45 €	

Tabla 7

En la tabla 8 se muestran los flujos de caja totales de cada título, individualmente considerados, y los de la cartera. La TIR de la cartera se ha calculado tomando como valor inicial de la misma su valor de mercado: 104.530,45 euros, obteniéndose un rendimiento del 6,97%. Obsérvese que si la hubiésemos calculado a través de la media ponderada de los rendimientos hasta el vencimiento (cosa que no se debe hacer nunca) de cada uno de los títulos habríamos obtenido: 0,2 x 6,25% + 0,24 x 6,85% + 0,3 x 7,05% + 0,26 x 7,12% = 6,86%. Por otra parte, la *duración* de dicha cartera tomará un valor de 6,33 años y su *duración modificada* será de 5,91%.

Año	A	B	C	D	Cartera
0					-104.530
1	1.400	1.850	2.340	2.000	7.590
2	1.400	1.850	2.340	2.000	7.590
3	21.400	1.850	2.340	2.000	27.590
4		1.850	2.340	2.000	6.190
5		26.850	2.340	2.000	31.190
6			2.340	2.000	4.340
7			2.340	2.000	4.340
8			2.340	2.000	4.340
9			2.340	2.000	4.340
10			32.340	2.000	34.340
11				2.000	2.000
12				2.000	2.000
13				2.000	2.000
14				2.000	2.000
15				27.000	27.000

TIR =	**6,97%**
D =	**6,33**
D* =	**5,91%**

Tabla 8

Ahora bien, como ya hemos comentado en el epígrafe anterior, el cálculo de la *duración* implica que suponemos la existencia de una ETTI plana, es decir, que los rendimientos de todos los títulos de igual riesgo son iguales sean cuales sean sus plazos (lo que, todo hay que decirlo, no es muy realista). Esta suposición nos permite calcular la *duración* de una cartera (D_p) como la media ponderada de las *duraciones* de sus activos financieros componentes (D_i)[7]:

[7] Véase la demostración matemática en BIERWAG, Gerald (1991): *Análisis de la Duración*. Alianza. Madrid. Págs.: 125-126. En dicha demostración Bierwag utiliza una ETTI plana al suponer que el rendimiento de todos los bonos es el mismo sin importar cuál es su plazo.

$$Dp = D_1 X_1 + D_2 X_2 + ... + D_n X_n$$

donde X_i indica la ponderación del valor de mercado del activo en el valor de la cartera (la suma de todas las ponderaciones deberá ser igual a la unidad). Así, por ejemplo, la *duración* de la cartera según esta idea sería:

$$D = 2{,}81 \times 0{,}20 + 4{,}36 \times 0{,}24 + 7{,}37 \times 0{,}20 + 9{,}47 \times 0{,}26 = 6{,}287 \text{ años}$$

que es ligeramente diferente del cálculo realizado en el ejemplo anterior debido a que en él no existía una ETTI plana sino que era de tipo creciente. Si calculamos la *duración modificada* de la cartera de igual forma obtendremos un valor del 5,877% (también podríamos haber dividido 6,287 entre 1,0686 y obtendríamos un resultado casi idéntico, pero es más coherente hacerlo a través de la media ponderada).

Si calculamos la *duración en euros* de la cartera veremos que es igual a la suma algebraica de las de sus componentes. Así, la *duración en euros* de cada bono será:

D*eur. (A) = 200 x 102,00 x (-2,64) x 0,01 = 539,50 €
D*eur. (B) = 250 x 102,26 x (-4,08) x 0,01 = 1.044,37 €
D*eur. (C) = 300 x 105,26 x (-6,89) x 0,01 = 2.175,00 €
D*eur. (D) = 250 x 107,96 x (-8,84) x 0,01 = 2.384,91 €

La suma algebraica es igual a 6.143,79 € que coincidiría (salvo por errores de redondeo) con la *duración en euros* de la cartera si la *duración modificada* de ésta se hubiera calculado a través de una media ponderada.

En todo caso, la suposición de que la ETTI es plana no debería producir un error demasiado grande cuando el diferencial entre los tipos de interés a corto y a largo plazo es pequeño. Otra cosa ocurriría si dicho diferencial fuera significativo.

7. El concepto de *convexidad*

Como ya se ha visto anteriormente, el precio de los bonos está inversamente relacionado con el valor de los tipos de interés. Cuando éstos ascienden aquél cae, y lo contrario. En la figura 7 se muestra en el gráfico de la izquierda dicha relación a través de la denominada *curva precio/rendimiento*. La primera derivada de la función que dibuja dicha curva es lo que en el epígrafe anterior denominamos *duración modificada*, que dicho de otra forma, es la pendiente de la curva precio/rendimiento en un punto determinado que coincide con el rendimiento actual y que actúa de punto de tangencia entre ella y la recta representativa de la *duración modificada*, tal y como aparece en la gráfica de la derecha de la figura 7.

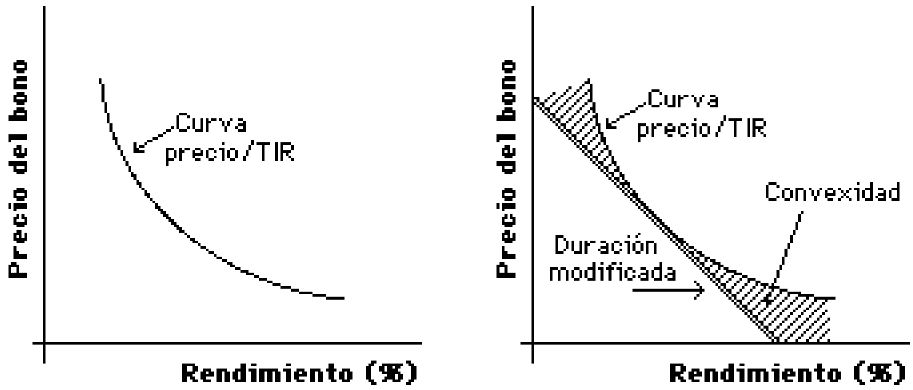

Fig.7 Curva precio/rendimiento, *duración modificada* y *convexidad*

La *duración modificada* es una estimación de tipo lineal de una relación precio-rendimiento no lineal, que puede ser utilizada para predecir la variación en el precio de los bonos cuando se mueven los tipos de interés.

% de cambio en el precio de los bonos	=	- *duración modificada*	x	% de cambio en el rendimiento

Pero como se puede apreciar en la figura 7, el uso de la *duración modificada* produce un error (la zona rallada) en la estimación de la curva precio/rendimiento. Esto es, la *duración modificada* explica bastante bien las variaciones en el precio debidas a pequeños cambios en el rendimiento, pero no funciona tan bien cuando estas alteraciones son grandes (más allá de 50 puntos básicos de variación en los tipos de interés). Esto es debido a que la *duración modificada* asume que existe una relación lineal entre las variaciones del rendimiento y las del precio, lo que implica cometer errores cuando las variaciones son de una magnitud importante.

En la figura 8 se puede observar lo mismo a través de un ejemplo real. Podemos ver el punto de tangencia entre la curva precio/rendimiento y la *duración modificada*. La diferencia entre ambas es la *convexidad* que se muestra en forma curva y cuyos valores aparecen en la ordenada de la derecha (C).

Con objeto de predecir dicho error o disparidad, surge la *convexidad* que es, en realidad, la segunda derivada de dicha curva y muestra cómo varía la *duración modificada* cuando se alteran los tipos de interés. Dicha segunda derivada es igual a:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)Q_j}{(1+r)^j}$$

donde Q_j es el cupón que el bono proporcionará en el período *j*, el máximo número de períodos será *n* y *r* es la tasa de rendimiento interna de ese bono en el momento del análisis.

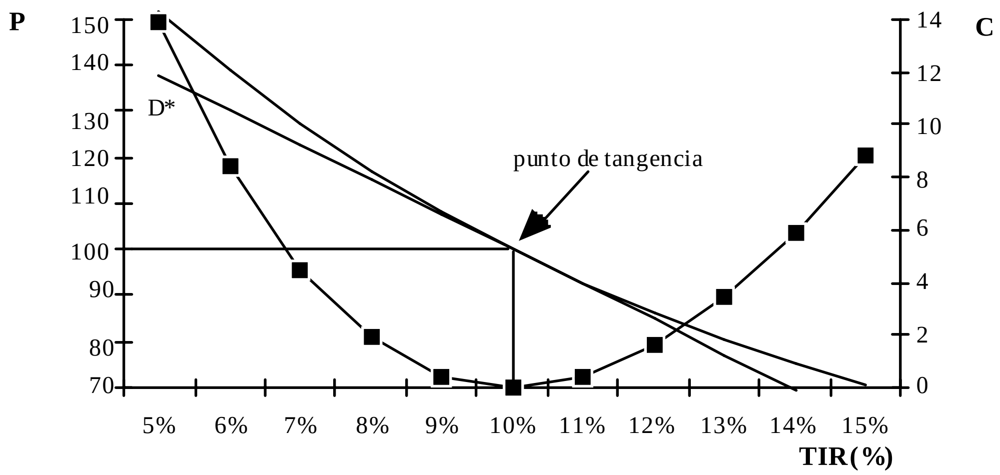

Fig.8 La *convexidad* como diferencia entre el precio real de un bono y el obtenido a través de la *duración modificada* cuando varían los tipos de interés.

Así, si quisiéramos averiguar la variación en el precio de un bono debida a una ascenso de un 1% en el tipo de interés sumaríamos la variación producida por la *duración modificada* (que aparecerá con signo negativo) y la producida por la *convexidad* para la misma variación en el rendimiento (100 puntos básicos en ambos casos):

$$dP/P = -D^* \times (dr) + (1/2) \times \text{convexidad} \times (dr)^2 =$$
$$= - D^* \times (0{,}01) + (1/2) \times \text{convexidad} \times (0{,}01)^2$$

En realidad lo que estamos haciendo es utilizar la fórmula de Taylor[8] (los dos primeros términos del sumatorio) con objeto de aproximarnos al valor real de la curva precio/rendimiento.

7.1 Ejemplo

Supongamos que estamos analizando una emisión de obligaciones a diez años, que paga un cupón de 70 euros por título y año vencido, que tiene un rendimiento hasta el vencimiento del 8%, una *duración* de 7,42 años y una *duración modificada* del 6,87%. En la tabla 9 se puede ver lo que sucedería con el cambio porcentual en el precio, tanto si es el estimado como el actual, al variar la tasa de rendimiento anual. La primera columna muestra los diversos valores del rendimiento (TIR); la segunda la variación en porcentaje de la misma; la tercera el precio teórico del titulo según el valor del rendimiento; la cuarta la variación porcentual actual del precio (por ejemplo, (1.035,9-932,9) ÷ 932,9 = 11,04%). La quinta columna nos muestra la estimación, a través de la *duración modificada* de dicha variación (por ejemplo, [-6,87] x [-1,5%] = 10,31%) y en la sexta se puede ver el valor de la *convexidad* en porcentaje sin más que restar el valor de las dos columnas anteriores (0,73%).

---

[8] Fórmula de Taylor $f(x + \partial x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \partial x_j \frac{d^j f}{dx^j}(x)$

Como se observa en la tabla 9 cuanto más varíen los tipos de interés mayor es la diferencia entre el precio estimado a través de la *duración modificada* y el precio intrínseco del bono, es decir, mayor es la *convexidad*. De hecho, ésta última es prácticamente despreciable cuando la variación es igual o inferior a 50 puntos básicos, como ya señalamos anteriormente.

TIR (%)	% cambio TIR	Precio intrínseco	% cambio del precio Actual	Estimado	Convexidad (%)
4,5	-3,5	1.197,8	28,40	24,05	4,35
5,0	-3,0	1.154,4	23,75	20,61	3,14
5,5	-2,5	1.113,1	19,32	17,18	2,14
6,0	-2,0	1.073,6	15,08	13,74	1,34
6,5	-1,5	1.035,9	11,04	10,31	0,73
7,0	-1,0	1.000	7,19	6,87	0,32
7,5	-0,5	965,7	3,52	3,44	0,08
8,0	**0,0**	**932,9**	**0,0**	**0,0**	**0,0**
8,5	0,5	901,6	-3,36	-3,44	0,08
9,0	1,0	871,6	-6,57	-6,87	0,30
9,5	1,5	843,0	-9,64	-10,31	0,67
10,0	2,0	815,7	-12,56	-13,74	1,18
10,5	2,5	789,5	-15,37	-17,18	1,81
11,0	3,0	764,4	-18,06	-20,61	2,55
11,5	3,5	740,5	-20,62	-24,05	3,43

Tabla 9

Si la *duración* de un bono fuese constante para todos los niveles de rendimiento, la *convexidad* no existiría. Es precisamente la variación en la *duración* del titulo lo que da lugar a la *convexidad*. Esta última tiene un efecto positivo: la *duración* de un bono se alarga cuando el mercado es alcista (aumentan las ganancias de capital al aumentar los precios y descender los rendimientos) y se acorta cuando es bajista (suavizando las caídas de los precios debidas a incrementos en los rendimientos).

Si queremos corregir la *duración modificada* con la *convexidad* en el caso de nuestro ejemplo y para una variación de un 3% de los tipos de interés hacia arriba o hacia abajo, lo primero será calcular la segunda derivada de la curva precio-rendimiento para un tipo de rendimiento del 8%, lo que se conoce como *convexidad en euros*:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)Q_j}{(1+r)^j}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{(1{,}08)^2} \left[\frac{1x2x70}{(1{,}08)} + \frac{2x3x70}{(1{,}08)^2} + \frac{3x4x70}{(1{,}08)^3} + \ldots + \frac{10x11x1.070}{(1{,}08)^{10}} \right] = 58.425{,}22$$

seguidamente dividiremos la *convexidad en euros* entre el valor actual del bono (932,9 €), lo que nos dará el valor de la convexidad: 62,63. Y ahora aplicaremos la siguiente fórmula:

- Si los tipos de interés ascienden en un 3%:
$dP/P = - 6,87 \times (0,03) + (1/2) \times 62,63 \times (0,03)^2 = -17,79\%$
- Si los tipos de interés descienden en un 3%:
$dP/P = - 6,87 \times (-0,03) + (1/2) \times 62,63 \times (-0,03)^2 = 23,43\%$

Compruebe como en la cuarta columna de la tabla 9 los valores reales son, respectivamente, del –18,06% y del 23,75% para la subida y bajada de los tipos de interés en 300 puntos básicos. El error cometido es ahora, después de corregirlo con la *convexidad*, mucho más pequeño para variaciones importantes de los tipos de interés.

7.2 Ejemplo: bono con cupones semestrales

Un bono al que le quedan 8 años de plazo hasta su vencimiento y que paga tres euros cada semestre hasta el final de su vida se está vendiendo a 93,953 euros por lo que su rendimiento hasta el vencimiento en términos nominales es igual al 7%. Se desea calcular el nuevo precio del bono si los tipos de interés anuales descienden 85 puntos básicos.
La TIR semestral la vamos calcular dividiendo 7% entre 2 = 3,5%
La *duración* es igual a:

$$D = \frac{1 + r}{r} - \frac{n(c - r) + (1 + r)}{c(1 + r)^n - (c - r)} = \frac{1,035}{0,035} - \frac{16(0,03 - 0,035) + 1,035}{0,03(1,035)^{16} - (0,03 - 0,035)}$$

D = 12,82 semestres = 6,41 años

$$D^* = \frac{6,41}{(1 + 0,035)} = 6,19\%$$

Convexidad en euros =

$$\frac{d^2P}{dr^2} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)Q_j}{(1+r)^j} = \frac{1}{(1,035)^2}\sum_{j=1}^{16}\frac{j(j+1)Q_j}{(1,035)^j} = 17.661,83\ €$$

Convexidad: 17.661,83 € ÷ 93,953 € = 187,986
Convexidad equivalente en años: 187,986 ÷ $(2)^2$ = 47

Variación de del precio =
$dP/P = - 6,19 \times (-0,0085) + (1/2) \times 47 \times (-0,0085)^2 = 0,052615 + 0,0017 = 5,43\%$

Nuevo precio del bono: 93,953 x (1 + 0,0543) = <u>99,05 euros</u>. (El nuevo precio real del bono es 99,063 euros)

NOTA: Para evitarse problemas con las expresiones de la *duración* y de la *convexidad* todos los cálculos deben estar referidos a una base nominal anual. Es decir, la TIR hasta el vencimiento debe estar en términos nominales anuales y el posible aumento o descenso de los tipos de interés debe expresarse sobre dicha tasa nominal anual; así, en nuestro caso un descenso del tipo de interés de 85 puntos básicos implica que la nueva TIR hasta el vencimiento va a ser del 6,15% nominal anual. Por tanto, si la variación de los tipos de interés se refiere a una base anual efectiva deberemos calcular su variación en base nominal anual.

7.3 La *convexidad* de un bono entre dos fechas de pago del cupón.

Como vimos en el apartado 3.3 con la *duración modificada*, ocurre lo mismo con la *convexidad* cuando es necesario calcularla en una fecha que no coincide exactamente con la del pago del cupón. La expresión a utilizar es:

$$C = \frac{(1+r)^{f-2}}{P_0}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-f)\,(j-f+1)\,FC_j}{(1+r)^j}\right]$$

donde **r** es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento, **f** es el tanto por uno del tiempo transcurrido desde la fecha de pago del último cupón (0,5 si los cupones se pagan anualmente y han transcurrido seis meses), $\mathbf{P_0}$ es el precio actual del bono en el mercado (con *cupón corrido* incluido) y **n** es el plazo que resta hasta el vencimiento del bono.

En la misma idea que dijimos en el apartado 3.3, esta expresión es realmente la expresión general de la *convexidad* porque si f=0 lo que tenemos es la expresión que hemos estado manejando a lo largo del epígrafe 7.

7.4 La expresión de la *convexidad* en tiempo continuo

De la misma forma que en el sub-epígrafe 3.4 vimos la expresión en tiempo continuo para la duración ahora extraeremos la segunda derivada de la expresión precio-rendimiento para la tasa de rendimiento r con el objetivo de obtener la convexidad.

$$\frac{d^2P_t}{dr^2}\,\frac{1}{P_t} = \left[(n-t)^2\;P_n\;e^{-r\,(n-t)} + \sum_{j=1}^{n}(t_j-t)^2\;FC_j\;e^{-r\,(t_j-t)}\right]\frac{1}{P_t}$$

donde $\mathbf{P_n}$ es el precio de reembolso del bono en la fecha de amortización del mismo (**n**), **r** es la tasa de rendimiento hasta el vencimiento, **t** indica el instante en el que se calcula el precio, FC_j es el flujo de caja del período, y **e** es igual a 2,718281828.

7.5 La convexidad de una cartera

El cálculo de la convexidad de la cartera debería hacerse considerando todos los flujos de caja generados por ella, al igual que hacíamos en el caso de su *duración*. Aunque, si suponemos que la ETTI es plana, bastaría con calcular la media ponderada de las convexidades de los bonos que la componen.

Efectivamente, la *convexidad* de la cartera mostrada en el epígrafe 6 es igual a 55,32 pero si la calculamos teniendo en cuenta las convexidades individuales (en la tabla 10 se muestra el cálculo de la *convexidad* de cada bono; al valor actual obtenido se le divide por el valor de mercado de cada título y el resultado es: 9,73; 21,86; 63,10; y 109,83 respectivamente para los bonos A, B, C y D) ponderadas por su participación en la cartera, obtendremos:

$$\text{conv} = 9{,}73 \times 20\% + 21{,}86 \times 24\% + 63{,}10 \times 30\% + 109{,}83 \times 23\% = 54{,}66$$

un valor muy aproximado al obtenido a través de los flujos de caja de la cartera.

VA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
992,9	13,2	37,2	1.070,5												
2.235,7	13,9	38,9	72,8	113,5	2.313,4										
6.642,0	14,6	40,8	76,3	118,8	166,4	217,7	271,1	325,6	380,2	5.999,9					
11.856,6	14,9	41,8	78,1	121,5	170,2	222,4	276,8	332,2	387,7	442,4	495,6	546,7	595,4	641,4	9.238,0

Tabla 10. Valor actual de los flujos de caja de cada bono multiplicados por t y por t+1 y dividido el resultado entre $(1+r)^2$.

7.6 Factores que influyen en la *convexidad*

La *duración*. La *convexidad* está relacionada positivamente con la *duración* del bono subyacente, es decir, las emisiones con una *duración* mayor tienen también mayor *convexidad* que aquéllas cuya *duración* sea más pequeña. En realidad, la *convexidad* es una función creciente de la *duración*, puesto que la relación entre ambas no es lineal, lo que explica que un bono que tenga el doble de *duración* que otro, tenga más del doble de *convexidad*.

Los flujos de caja. La *convexidad* está relacionada positivamente con el grado de dispersión de los flujos de tesorería de un bono. Es decir, si comparamos dos bonos de la misma *duración*, aquél que tenga la mayor distribución de los flujos de caja tendrá una mayor *convexidad*. Esto se debe al hecho de que los flujos de caja a largo plazo soportan progresivamente una mayor cantidad de *convexidad*.

La volatilidad de los tipos de interés. La *convexidad* está relacionada directamente con la volatilidad del mercado. Una gran volatilidad de los tipos de interés del mercado crean unos mayores efectos de *convexidad*, puesto que aumenta la probabilidad de una mayor variación en el rendimiento del mercado. Esto último hace que el efecto de la volatilidad de la TIR sea mayor sobre los bonos de mayor plazo.

El sentido de la variación del rendimiento. La *convexidad* está más influida por los descensos del rendimiento que por los ascensos del mismo.

8. La *duración efectiva*

La *duración modificada* de un bono que tiene características especiales, por ejemplo, que pueda ser amortizado anticipadamente, que sea convertible, etcétera, se denomina *duración efectiva*. De hecho, la principal diferencia entre la *duración modificada* y la *efectiva* estriba en que en ésta última se supone que al variar los tipos de interés también varían los flujos de caja esperados del activo financiero, cosa que no ocurre con la *duración modificada*. Hay varios métodos para calcularla según sea el activo financiero subyacente, sin embargo, vamos a mostrar una expresión muy sencilla que sirve para calcular el riesgo de interés de cualquier tipo de activo financiero; siendo dicho riesgo la variación porcentual inducida en su precio ante un pequeño cambio de los tipos de interés anuales. La expresión es la siguiente:

$$D^* \text{ aprox.} = \frac{P_- - P_+}{P_0 \left(r_+ - r_- \right)}$$

Para calcular esta expresión deberán seguirse los tres pasos que se muestran a continuación:

1º. Aumente el rendimiento del bono un pequeño número de puntos básicos y determine su nuevo precio. Al nuevo rendimiento le denominaremos r_+ y al nuevo precio P_+

2º. Reduzca el rendimiento del bono un pequeño número de puntos básicos y determine su nuevo precio. Al nuevo rendimiento le denominaremos r_- y al nuevo precio P_-

3º. Siendo P_0 el precio original, calcule la *duración modificada* aproximada a través de la expresión anterior.

Veamos un ejemplo, supongamos que estamos analizando una emisión de obligaciones a diez años, que paga un cupón de 12 euros por título y año vencido, que tiene un rendimiento hasta el vencimiento del 12%. Si el rendimiento aumenta 50 puntos básicos el nuevo precio será P_+ = 97,232 euros; mientras que si el rendimiento desciende hasta situarse en el 11,50%, el nuevo precio será P_- = 102,884 euros. La *duración modificada* aproximada será:

$$D^* \text{ aprox.} = \frac{P_- - P_+}{P_0 \left(r_+ - r_- \right)} = \frac{102{,}884 - 97{,}232}{100\,(0{,}125 - 0{,}115)} = 5{,}652\%$$

teniendo en cuenta que la *duración modificada* real es de 5,65%, la aproximación es bastante buena.

De la misma manera podríamos obtener una fórmula aproximada de la *convexidad* utilizando la misma notación que anteriormente:

$$C\ \text{aprox.} = \frac{P_+ + P_- - 2P_0}{P_0\,[(r_+ - r_-)/2]^2}$$

Así, en el ejemplo anterior la *convexidad* aproximada sería 46,28 (la real es de 46,26).

La importancia de estas dos fórmulas aproximadas radica en que se pueden utilizar para cualquier activo financiero. No se olvide la definición de *duración modificada*, pues es normal encontrarse con activos financieros cuyo plazo es muy inferior al de su *duración modificada* debido a que éste nos indica la variación del precio ante un cambio en el rendimiento (a diferencia de la *duración* de Macaulay que hace referencia al vencimiento promedio de los flujos de caja); así, es posible encontrarse con activos financieros (opciones, hipotecas o productos estructurados, por ejemplo) con plazos de 5 años y *duraciones modificadas* del 20% (¡y no de veinte años!).

Direcciones útiles de Internet

Investopedia → http://www.investopedia.com

Bibliografía

BIERWAG, G., KAUFMAN,G., y TOEVS, A. (1983): "Duration, Its Development and Use in Bond Portfolio Management". *Financial Analysts Journal* (Julio-Agosto).

BIERWAG, Gerald (1977): "Inmunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Diciembre.

BIERWAG, Gerald (1987): *Duration Analysis*. Ballinger Pub. Co. Cambridge (Mass.) 1987. Edición española: *Análisis de la Duración*. Alianza. Madrid. 1991. Págs.: 86-93.

BODIE, Zvi; KANE, Alex y MARCUS, Alan (1993): *Investments*. Irwin. Homewood (Ill.).

BRENNAN, M.J., y SCHWARTZ, E.S. (1983): "Duration, Bond Pricing and Portfolio Management" en KAUFMAN, G.: *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration, Analysis and Inmunization*. JAI Press. Greenwich (Conn.).

COOPER, I. (1977): "Assets Values, Interest Rate Changes and Duration". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Diciembre.

COX, J.C., INGERSOLL, J.E., y ROLL, S. (1979): "Duration and the Measurement of Basis Risk". *Journal of Business*. Enero.

DOUGLAS, Livingston (1990): *Bond Risk Analysis. A Guide to Duration and Convexity*. New York Institute of Finance. Nueva York.

ELTON, Edwin y GRUBER, Martin (1991): *Modern Portfolio Theory and Investments Analysis*. John Wiley. Nueva York.

FABOZZI, Frank (1995): *Investment Management*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). Págs.: 423-438

FABOZZI, Frank (1996): *Bond Markets. Analysis and Strategies*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). (3ª ed.).

FABOZZI, Frank y FONG, Gifford (1994): *Advanced Fixed Income Portfolio Management. The State of the Art*. Probus. Chicago. Págs.: 37-64

FARRELL, James (1997): *Portfolio Management*. McGraw Hill. Nueva York. (2ª ed.)

FERRER, Román (1994): "Modelos de Valoración del Riesgo de Interés de los Títulos de Renta Variable". *Actualidad Financiera* nº 44. Págs.: 623-654

FISHER, Lawrence y WEIL, Roman (1971): "Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and optimal Strategies". *Journal of Business*, 44 Octubre.

FULLER, R.J., y SETTLE, J.W. (1984): "Determinants of Duration and Bond Volatility". *Journal of Portfolio Management*. Verano.

ISSN: 1988-1878

HAUGEN, Robert (1990): *Modern Investment Theory*. Prentice Hall. Englewood Cliffs. (NJ). Págs.: 376-419.

INGERSOLL, J.E., SKELTON, J., y WEIL, R.L. (1978): "Duration Forty Years Later". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Noviembre.

MARTIN, José; RAYO, Salvador y SAEZ, José (1991): "La Gestión del Riesgo de Tipos de Interés en Carteras de Renta Fija". *Actualidad Financiera* nº 41. Págs.: 667-691

MASCAREÑAS, Juan (2002): *Gestión de Activos Financieros de Renta Fija*. Pirámide. Madrid.

MASCAREÑAS, Juan (2004): *El Riesgo en la Empresa. Tipología, Análisis y Valoración*. Pirámide. Madrid.

McENALLY, R.W. (1977): "Duration as a Practical Tool for Bond Management". *Journal of Portfolio Management*. Verano.

MENEU, Vicente; NAVARRO, Eliseo y BARREIRA, Teresa (1992): *Análisis y Gestión del Riesgo de Interés*. Ariel. Barcelona. Cap. 8

MINGUET, Albert (1993): *Les Techniques de Gestion du Risque d'Interêt*. Puf. París.

MOHSENI, A., y PLUMYENE, J-M (1991): *La duration et le risque de taux*. PUF. París.

REILLY, F., y RUPINDER, S. (1980): "The Many Uses of Bond Duration". *Financial Analysts Journal*. Julio-Agosto.

SHARPE, William; ALEXANDER, Gordon y BAILEY, Jeffery (1995): *Investments*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). (5ª ed.)

VAN HORNE, James: *Financial Markets Rates & Flows*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). 1990

WILMOT, Paul (2006): *Introduces Quantitative Finance*. John Wiley. Chichester (UK)