Universidad Complutense de Madrid

Gestión de Carteras I: Selección de Carteras

© *Juan Mascareñas*
Universidad Complutense de Madrid

Versión original: **ene-86**; Última versión: **feb-07**

1. Introducción

La inversión en valores mobiliarios entra dentro de lo que se denomina comúnmente inversiones financieras. Cuando una persona, o empresa, adquiere diversas cantidades de diferentes tipos de valores mobiliarios se dice que está en posesión de una *cartera de valores*, es decir, de una combinación de activos financieros. Las inversiones financieras, como cualquier proyecto de inversión, se componen de un desembolso inicial y de unos flujos de caja (dividendos, intereses, derechos de suscripción preferentes, o los ingresos de la venta de la totalidad o de parte de la cartera), por lo que el análisis de dicho tipo de inversión seguirá el mismo procedimiento que el de cualquier otra.

Es preciso tener en cuenta que una inversión financiera se diferencia de una productiva en que:

a) Es fraccionable
b) Tiene mayor liquidez
c) Es diversificable.
d) Tiene una mayor flexibilidad temporal

Entre los objetivos que una persona puede tener a la hora de formar una cartera de valores podemos destacar, los siguientes; a) controlar una empresa, b) conseguir una cierta rentabilidad, c) evitar en lo posible la erosión inflacionaria sobre el dinero ahorrado, d) conseguir una cierta liquidez, etc.

Supongamos que dicho inversor tiene una suma determinada de dinero que desea invertir en el momento actual en una serie de activos financieros. Este dinero deberá permanecer invertido durante cierto tiempo (el horizonte temporal de la inversión) al final del cual venderá los títulos, procediendo a consumir o a reinvertir el dinero recibido.

Por lo tanto, podemos denominar al momento inicial de la inversión como **t=0**, en este instante es cuando hay que elegir qué activos financieros hay que comprar y cuáles no, los primeros deberán ser mantenidos hasta el momento final, al que denominaremos como **t=1**. Dado que una cartera es una colección de activos financieros, esta decisión equivale a "seleccionar" una cartera óptima de entre una serie de posibles carteras de activos, por lo que desde ahora nos referiremos a este tipo de decisión como un problema de *selección de carteras*.

En el momento inicial el inversor sabe que, durante el horizonte temporal considerado, el rendimiento del activo, y por ende el de la cartera, es desconocido. Si bien es cierto que se podría estimar el *rendimiento esperado* (o media) de varios activos e invertir en aquél que tuviese el mayor rendimiento esperado, ello no sería una buena idea puesto que los inversores tienden a preferir las inversiones más rentables pero también las más seguras o ciertas.

Precisamente la aportación de Markowitz radica en haber recogido en su modelo la *conducta racional* del inversor de forma explícita es decir, el inversor persigue maximizar el rendimiento esperado y, al mismo tiempo, minimizar su incertidumbre o *riesgo*. Por lo que el inversor perseguirá conseguir una cartera que optimice la combinación *rendimiento-riesgo* medida a través de la esperanza matemática de ganancia y de la varianza (o desviación típica) de la misma.

Una consecuencia de tener dos objetivos contrapuestos (riesgo y rendimiento) es que el inversor deberá diversificar con objeto de adquirir no sólo un activo financiero sino varios[1]. Por ello, previamente deberemos analizar cómo se obtiene la rentabilidad y el riesgo de un activo en particular, para más adelante analizar lo mismo pero aplicado a una cartera de activos.

2. La rentabilidad y el riesgo de un activo financiero

Si tratamos de comparar diferentes inversiones en otros tantos activos financieros, deberemos calcular de la forma más aproximada posible el rendimiento de cada uno de ellos.

Si nos encontramos en un ambiente de certeza, el rendimiento que esperamos obtener para cada activo coincidirá con el que realmente obtendremos y, por lo tanto, aquél título que proporcione la mayor ganancia esperada será el elegido.

Por desgracia, la existencia de la incertidumbre implica que el rendimiento de la inversión raramente coincidirá con su valor esperado. Todos los activos financieros cotizados en el mercado de valores están sujetos a un riesgo; claro que a diferentes tipos de activos corresponderán diferentes tipos de riesgo. Sin embargo, el efecto del riesgo, sea cuál sea su tipo, es siempre el mismo, los rendimientos obtenidos en la actualidad serán diferentes de los esperados por el inversor.

Así que el inversor necesita poder cuantificar para cada activo tanto el rendimiento incierto corno el nivel de dicha incertidumbre, antes de tomar una decisión sobre la inversión a efectuar. Una vez realizado lo anterior, según sea su actitud hacia las diferentes combinaciones rendimiento-riesgo, elegirá aquélla que mejor se adapte a sus deseos.

2.1 El cálculo del rendimiento

El rendimiento del título i durante un período de tiempo **t**, vendrá definido por la siguiente expresión:

$$R_{it} = \frac{d_{it} + P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} = \underbrace{\frac{d_{it}}{P_{it-1}}}_{\substack{\text{Rentabilidad}\\ \text{por dividendos}}} + \underbrace{\frac{P_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}}}_{\substack{\text{Ganancia de}\\ \text{Capital}}} \qquad \text{[Ec.1]}$$

---

[1] La diversificación se resume en el conocido aforismo "no poner todos los huevos en la misma cesta" que, curiosamente los anglosajones achacan a Sancho Panza porque en las primeras traducciones de El Quijote al inglés aparecía en el Capítulo XXIII, aunque en el original castellano no aparece. Mark Twain, que seguramente leyó una de esas traducciones, contraataca en el capítulo XV de su novela *The Tragedy of Pudd'nhead Wilson*: "-No poner todos los huevos en una cesta- que es lo mismo que decir -dispersa tu dinero y tu atención- pero el hombre sabio dice -pon todos los huevos en una cesta y VIGILA LA CESTA-" (esta última frase se la oyó decir Twain a Andrew Carnegie).

donde $\mathbf{P_{it}}$ indica el precio del activo financiero **i** al final del período **t**; $\mathbf{P_{t-1}}$ es el precio del activo al comienzo del período **t**; $\mathbf{R_{it}}$ el rendimiento del título **i** en el período **t**; y $\mathbf{d_{it}}$ el dividendo recibido durante el período.

El rendimiento de un título o activo si es calculado *ex-post* ($\mathbf{R_{it}}$), será conocido con certeza, lo que no ocurrirá si se obtiene ex-ante ($\mathbf{E_{it}}$) debido, a la ya comentada, aparición del riesgo, el cual se refleja en la variabilidad de los rendimientos esperados. Así que para cuantificar el rendimiento de un título en condiciones de incertidumbre tendremos que echar mano de las probabilidades, ya sean éstas objetivas o subjetivas.

Una vez que disponemos de la distribución de probabilidad de los posibles rendimientos de un título determinado, calcularemos su valor esperado utilizando la esperanza matemática o media:

[ec.2] $$E_{it} = \sum_{1}^{n} p_i \, R_i$$

Ejemplo: Después de calcular el rendimiento de dos empresas, A y B, a través de sus respectivas series de precios durante un período de tiempo determinado. Los principales valores del mismo se han agrupado con arreglo a sus probabilidades de ocurrencia tal y como figuran en la tabla siguiente

	Rendimiento (probabilidad)		
	25%	50%	25%
Empresa A	20%	10%	0%
Empresa B	45%	25%	5%

El rendimiento esperado del título A será:
E_A = 20% x 0,25 + 10% x 0,50 + 0% x 0,25 = 10%

El rendimiento esperado del título B será:
E_B = 45% x 0,25 + 25% x 0,50 + 5% x 0,25 = 25%

2.2 El cálculo del riesgo

El riesgo que puede afectar a los títulos puede ser de varias clases como, por ejemplo:

a) Incertidumbre de los dividendos (afecta a las acciones).
b) Riesgo de insolvencia (afecta a las obligaciones).
c) La inflación y los cambios de interés.
d) Variabilidad de los precios de mercado.

La idea de riesgo engloba dos nociones: a) incertidumbre ante el resultado y b) la posibilidad de obtener un resultado negativo. Por lo tanto, una buena definición de riesgo debería incluir una medida de ambas nociones. Estrictamente hablando, la desviación típica cumple sólo la primera de las mismas, pero si la distribución de probabilidad es simétrica respecto a la media (como la distribución normal, por ejemplo), cuanto mayor sea la desviación típica mayor será el riesgo de la inversión. Por ello, a pesar de sus limitaciones, la herramienta estadística utilizada para medir el riesgo de un título va a ser la desviación típica (o la varianza), debido a tres razones:

1. El rendimiento esperado y su desviación típica son las dos medidas necesarias para describir una distribución normal de probabilidad de los títulos (si estos se ajustan a dicha distribución).
2. Los estudios empíricos realizados demuestran que las distribuciones de frecuencia de la mayoría de los títulos siguen una distribución normal o muy próxima a la misma.
3. Es fácil de calcular

De esta forma cuanto mayor sea la desviación típica o la varianza del rendimiento de un título mayor será su riesgo. La *varianza* es la suma de los cuadrados de las dispersiones alrededor de un rendimiento esperado $E(R_i)$, ponderadas por sus probabilidades. Los cuadrados se usan debido a que si las dispersiones actuales se sumasen, se anularían entre ellas y sumarían cero. La *desviación típica* es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

[ec.3] $$\sigma^2(R_i) = \sum [R_i - E(R_i)]^2 \; p_i$$

Si la distribución es normal sabemos que la probabilidad de que el rendimiento obtenido caiga en el intervalo formado por la media más, o menos, una vez su desviación típica es del 68%; será del 95% si el intervalo se agranda a dos veces la desviación típica y al 99,7% si a tres veces.

Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo anterior de las empresas A y B podemos calcular el riesgo de sus acciones.

El riesgo del título A es:
$\sigma^2(R_A) = [20\% - 10\%]^2 \times 0{,}25 + [10\% - 10\%]^2 \times 0{,}50 + [0 - 10\%]^2 \times 0{,}25$
$\sigma^2(R_A) = 50‰o$
$\sigma(R_A) = 7{,}1\%$

El riesgo del título B es:
$\sigma^2(R_B) = [45\% - 25\%]^2 \times 0{,}25 + [25\% - 25\%]^2 \times 0{,}50 + [5\% - 25\%]^2 \times 0{,}25$
$\sigma^2(R_B) = 200‰o$
$\sigma(R_B) = 14{,}1\%$

3. El rendimiento y el riesgo de una cartera

Una vez que el inversor ya ha obtenido el rendimiento y el riesgo de cada valor en particular, podrá pasar a calcular el rendimiento y el riesgo de las diversas combinaciones que haga de los mismos, es decir, de las carteras que pueda formar.

3.1 El rendimiento de una cartera

Muestra la rentabilidad obtenida por término medio por cada unidad monetaria invertida en la cartera durante un determinado período de tiempo. Y vendrá dado por una media aritmética ponderada calculada de las siguientes formas:

[ec. 4] *Ex-post* (certeza) → $R_p = X_1R_1 + X_2R_2 + ... + X_nR_n$
[ec. 5] *Ex-ante* (incertidumbre) → $E_p = X_1E_1 + X_2E_2 + ... + X_nE_n$

donde las **X** indican la fracción del presupuesto de inversión destinada a la inversión i, como es lógico su suma deberá ser igual a la unidad; **n**, es el número de valores; $\mathbf{R_i}$ el rendimiento *ex-post* del título **i**, mientras que $\mathbf{E_i}$ es la esperanza del rendimiento del mismo título.

Así, para calcular el rendimiento esperado de una cartera compuesta por **N** activos financieros podremos utilizar el denominado vector de rendimientos esperados. Éste consiste en una columna de números donde cada fila representa el rendimiento esperado de un activo de la cartera. Así, por ejemplo, para una cartera de tres títulos:

$$E_i = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}2\% \\ 24{,}6\% \\ 22{,}8\% \end{bmatrix}$$

Debido a que el rendimiento esperado de una cartera es una media ponderada de los rendimientos esperados de los activos, la contribución de cada uno de estos al rendimiento esperado de la cartera dependerá de su rendimiento esperado y de la parte proporcional del valor de mercado inicial de la cartera. Nada más es relevante. Así que si un inversor desea el mayor rendimiento posible deberá invertir todo su presupuesto únicamente en el activo que proporcione el mayor rendimiento esperado (el 2 del ejemplo anterior, que proporciona un 24,6%). Aunque, como veremos más adelante, esta política es muy arriesgada puesto que los inversores deberán diversificar sus carteras, esto es, adquirir más de un activo con objeto de reducir su riesgo.

3.2 El riesgo de una cartera

El riesgo de una cartera se medirá. a través de la varianza del rendimiento $\mathbf{E_p}$ de la misma (obviamente siempre "ex-ante", puesto que si nos moviéramos en una ambiente de certeza no habría riesgo), de la siguiente forma:

[ec. 6] $\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + ...x_n^2\sigma_n^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + ... + 2x_{n-1}x_n\sigma_{(n-1)\,n}$

$$\sigma_p^2 = \sum\sum x_i x_j \sigma_{ij}$$

donde σ_{ij} es la covarianza del rendimiento del activo **i** con el del rendimiento del activo **j**. Recuerde que la *covarianza* es una medida estadística de la relación entre dos variables aleatorias cualesquiera, esto es, mide de qué manera dos variables aleatorias, tales como los rendimientos de dos activos se "mueven conjuntamente". Un valor positivo de la covarianza indicará que ambos rendimientos tienden a moverse en el mismo sentido, mientras que uno negativo indicará que se mueven en sentidos opuestos. Por otro lado, un valor próximo a cero indicará una posible ausencia de relación entre ambos rendimientos. La covarianza es igual al producto de las desviaciones típicas de los rendimientos multiplicado por el coeficiente de correlación entre ambos títulos ($\sigma_{AB} = \sigma_A\ \sigma_A\ \rho_{AB}$). El *coeficiente de correlación* reescala la covarianza para facilitar la comparación con los valores correspondientes de otros pares de variables aleatorias. Su valor oscilará entre -1 (correlación perfecta negativa) y 1 (correlación perfecta positiva).

Lo mismo que en el caso del rendimiento existía un vector de rendimientos esperados, en el caso del riesgo de una cartera se puede hablar de una *matriz de covarianzas* tal como la que se puede observar a continuación para el caso de tres activos:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

donde las diagonales son las varianzas de cada título mientras que las covarianzas que se encuentran encima de dicha diagonal son las mismas que las que están debajo de ella, es decir, los dos lados de la matriz son simétricos (puesto que $\sigma_{13} = \sigma_{31}$); por ello, no hará falta calcular las seis covarianzas sino sólo tres de ellas.

En conjunto, para calcular la combinación rendimiento-riesgo de una cartera, según el procedimiento aquí empleado, hacen falta **n** esperanzas matemáticas del rendimiento, **n** varianzas y $\mathbf{(n^2-n)/2}$ covarianzas. Por ejemplo, para formar una cartera que integre a unas 50 acciones ordinarias cotizadas en un mercado será necesario estimar 1.325 valores.

3.3 Tipos de correlaciones

Basándonos en los datos del ejemplo del epígrafe 2, calcularemos la cartera formada por los títulos A y B repartiendo el presupuesto de inversión por igual entre ambos (50% para cada uno). Analizaremos varios casos según sea el grado de correlación entre ambos.

A) Correlación perfecta positiva

Si el coeficiente de correlación es igual a la unidad (ρ_{jj}=1), como puede ocurrir cuando, por ejemplo, hablamos de títulos de la misma empresa o de distintas empresas que han comenzado un proceso de fusión, el cálculo del rendimiento esperado de la cartera (que no depende del grado de correlación) y de su riesgo medido por la desviación típica serán los siguientes:

$E_p = x_A E_A + x_B E_B = 0{,}50 \times 10\% + 0{,}50 \times 25\% = 17{,}5\%$

$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB} = \left[x_A \sigma_A + x_B \sigma_B\right]^2 = [0{,}50 \times 7{,}1\% + 0{,}50 \times 14{,}1\%]^2 = 112{,}50\%_{00}$

$\sigma_p = 10{,}6\%$

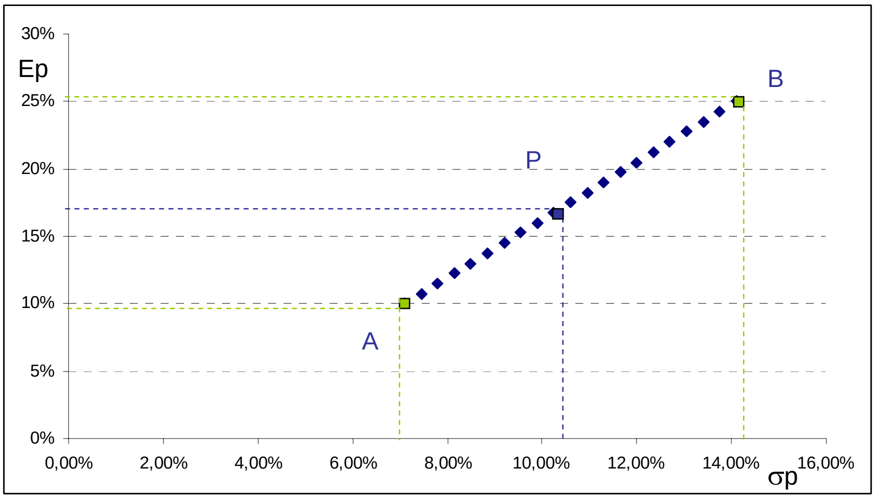


Fig.1

En la figura 1 se muestran las posibles combinaciones rendimiento-riesgo para todo tipo de carteras formadas por los títulos A y B que están perfectamente correlacionados. Como se aprecia dichas combinaciones tienen forma de línea recta, lo que indica que tanto el rendimiento como el riesgo son unas medias ponderadas del rendimiento y riesgo de los títulos individuales. Como consecuencia de ello no se obtiene ninguna ventaja, de cara a la reducción del riesgo, al combinarlos cuando el coeficiente de correlación es igual a la unidad. En este caso no hay ninguna ventaja en diversificar la cartera entre ambos títulos.

B) Ausencia de correlación

Si el coeficiente de correlación entre ambos títulos es igual a cero (ρ_{jj}=0), lo que denota que los rendimientos de ambos títulos son independientes entre sí al no estar afectados por factores comunes y que cualquier comportamiento similar será debido al azar. El rendimiento y riesgo de una cartera formada por los títulos A y B será entonces igual a:

$E_p = x_A E_A + x_B E_B = 0{,}50 \times 10\% + 0{,}50 \times 25\% = 17{,}5\%$

$\sigma_p^2 = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB} = x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 = [0{,}50^2 \times 7{,}1\%^2 + 0{,}50^2 \times 14{,}1\%^2]$ $= 62{,}50\%_{00}$

$\sigma_p = 7{,}9\%$

Como se aprecia el rendimiento de la cartera es el mismo que en el caso anterior, pero su riesgo es bastante menor, de hecho en la figura 2 se puede apreciar como la combinación de todas las carteras posibles tiene una forma de curva cóncava (se dice que es cóncava cuando al unir dos carteras cualesquiera, la A y la B, con una línea recta, ésta última queda por debajo del conjunto de combinaciones posibles, P por ejemplo).

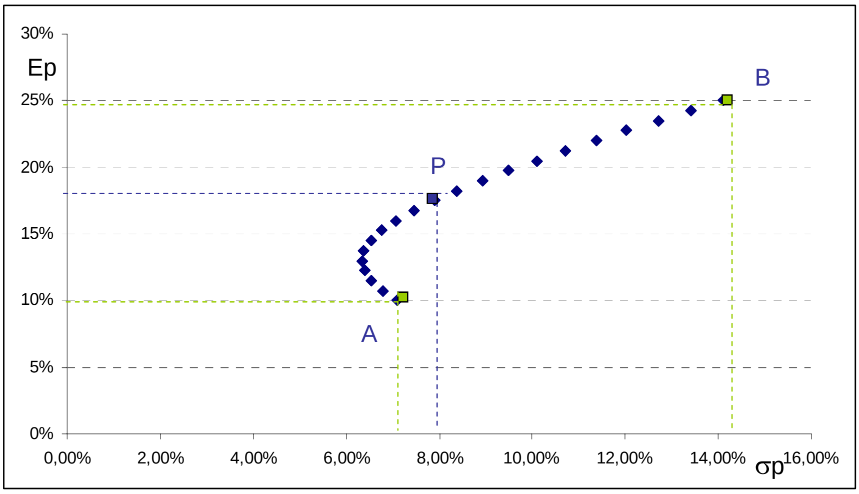


Fig.2 Combinación de dos activos independientes

Curiosamente, si ambos títulos tuviesen la misma desviación típica y la misma ponderación (X=O,5) el riesgo de la cartera sería:

$$\sigma_p^2 = x^2\sigma^2 + x^2\sigma^2 = 2x^2\sigma^2 = 2\frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

con lo que se demuestra que la desviación típica (o riesgo) de la cartera es menor que la de cada activo tomado individualmente, cuando todos ellos tienen la misma desviación típica.

Como conclusión, señalaremos que cuando dos títulos no están correlacionados entre sí no se debería invertir todo el presupuesto en el título de menor riesgo y menor rendimiento. La razón es que, como se aprecia en la figura 2, hay combinaciones de ambos títulos que proporcionan más rendimiento y el mismo riesgo que el título A (60% en A y 40% en B proporciona un rendimiento del 16% y un riesgo casi idéntico al de A).

C) Correlación perfecta negativa

Si la correlación entre ambos títulos es perfectamente negativa (ρ_{jj}=-1), querrá decir que el comportamiento del rendimiento de cada título es opuesto al del otro. Aunque este es un caso que difícilmente se dará en la práctica su utilidad teórica es grande como veremos seguidamente. El rendimiento y riesgo de la cartera serán:

$E_p = x_A E_A + x_B E_B = 0{,}50 \times 10\% + 0{,}50 \times 25\% = 17{,}5\%$

$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 - 2 x_A x_B \sigma_{AB} = [x_A \sigma_A - x_B \sigma_B]^2 = [0{,}50 \times 7{,}1\% - 0{,}50 \times 14{,}1\%]^2 = 12{,}25\%_{00}$

$\sigma_p = 3{,}5\%$

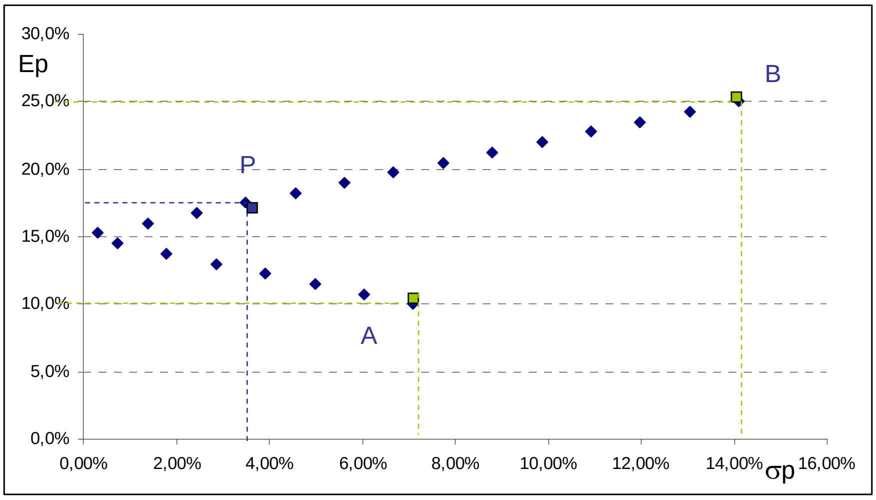


Fig.3 Combinación de carteras de dos títulos que están perfectamente correlacionados negativamente

Como se aprecia el rendimiento de la cartera es el mismo que en los dos casos anteriores, no así su riesgo cuyo valor es sensiblemente inferior al del titulo de menor riesgo, el A. De hecho en la figura 3 se puede observar el conjunto de combinaciones posibles y se observa que hay una combinación de los títulos A y B que produce un riesgo cero. Esa combinación se puede calcular:

$\sigma_p^2 = [x_A \sigma_A - x_B \sigma_B]^2 = 0 \rightarrow x_A \sigma_A = x_B \sigma_B \rightarrow x_A\ 7{,}1\% = (1 - x_A)\ 14{,}1\%$

$x_A = 67\%$ $x_B = 33\%$

cuyo rendimiento será (ver también la figura 3):

$E_p = x_A E_A + x_B E_B = 0{,}67 \times 10\% + 0{,}33 \times 25\% = 15\%$

Esto quiere decir que el inversor que se encuentre ante una combinación de carteras como ésta sabe que deberá invertir como mucho un 67% de su cartera en A, puesto que si invierte más de dicha cantidad (la recta que une la cartera A con el eje de ordenadas) siempre habrá otra combinación que le proporcione un rendimiento superior a igualdad de riesgo (la recta que une B con el eje de ordenadas). Nuevamente, podemos decir que en esta situación nunca se debería invertir todo el presupuesto en el título que tiene la menor combinación rendimiento-riesgo.

D) Correlación positiva

El caso más general es cuando nos enfrentamos a la combinación de dos títulos que están correlacionados positivamente. En esta situación la gráfica de las diferentes combinaciones de los mismos no será tan cóncava como la de la figura 2, ni tampoco una recta como la de la figura 1. Se aproximará a ésta última si el coeficiente de correlación está cercano a la unidad, y conforme se aproxime a cero su concavidad aumentará. Veamos un caso en el que la correlación será de 0,3.

$E_p = x_A E_A + x_B E_B = 0{,}50 \times 10\% + 0{,}50 \times 25\% = 17{,}5\%$

$\sigma_p^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_{AB} = 0{,}50^2 \times 7{,}1\%^2 - 0{,}50^2 \times 14{,}1\%^2 + 2 \times 0{,}50 \times 0{,}50 \times 7{,}1\% \times 14{,}1\% \times 0{,}3 = 78\%_{00}$

$\sigma_p = 8{,}8\%$

En resumen, cuando los rendimientos de los activos no están perfectamente correlacionados positivamente, la diversificación puede aumentar el ratio del rendimiento esperado de la cartera con respecto a su riesgo. Esto es, la diversificación puede alterar el equilibrio rendimiento-riesgo de las posibles inversiones según nos movamos a lo largo de la curva de la figura 4.

A lo largo de este epígrafe hemos visto, como a través de la combinación de dos títulos con objeto de formar una cartera, podemos sacar algunas conclusiones:

a) Hemos observado que cuanto menor sea el coeficiente de correlación entre los activos, mayor será el beneficio de la diversificación
b) Las combinaciones de dos activos nunca pueden tener más riesgo que el que se encuentra en la línea recta que conecta ambos.

Con arreglo a esto, ahora estamos en disposición de analizar la forma de la curva rendimiento-riesgo óptima a lo largo de la que se encuentran las combinaciones de más de dos activos.

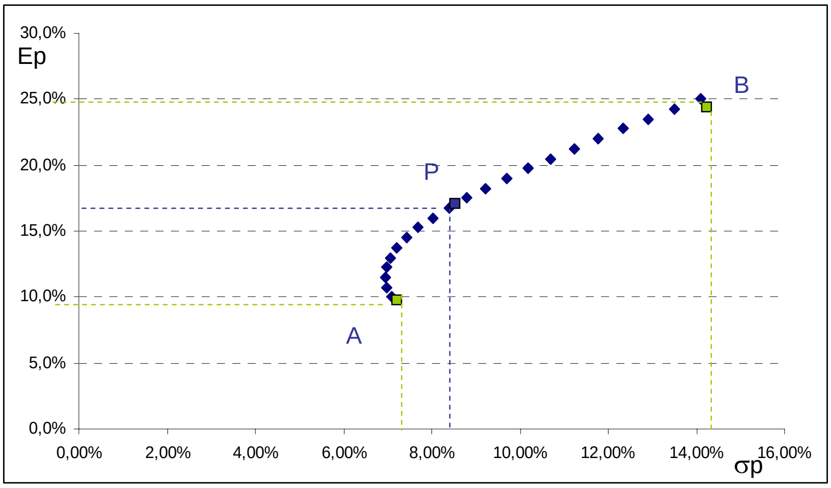


Fig. 4 Combinaciones de los activos A y B con correlación positiva

4. El modelo de Selección de Carteras de Harry Markowitz

En el epígrafe anterior hemos analizado el caso de una cartera formada por dos títulos cualesquiera que tienen diferentes combinaciones rendimiento-riesgo. En éste vamos a analizar el caso general que consiste en que disponiendo de una gran cantidad de títulos con distintos rendimientos y riesgos podamos elegir las mejores combinaciones de los mismos, es decir, las mejores carteras. Y ello lo haremos a través de la denominada Teoría de Selección de Carteras (*Portfolio Selection Theory*) que fue desarrollada por Harry Markowitz (premio Nobel de 1990) durante la década de los cincuenta[2]. Su trabajo es la primera formalización matemática de la idea de la diversificación de inversiones, es decir, el riesgo puede reducirse sin cambiar el rendimiento esperado de la cartera. Para ello se parte de los siguientes supuestos básicos en su modelo:

1°. El rendimiento de cualquier título o cartera es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversor. El *rendimiento* del título o cartera será medido a través de su *esperanza matemática*.

2º. El *riesgo* de un título, o cartera, viene medido por la *varianza* (o *desviación típica*) de la variable aleatoria representativa de su rendimiento[3].

3º. El inversor preferirá aquellos activos financieros que tengan un mayor rendimiento para un riesgo dado, o un menor riesgo para un rendimiento conocido. A esta regla de decisión se la denomina *conducta racional del inversor.*

[2] Harry Markowitz publicó su artículo "Portfolio Selection", *Journal of Finance* 7 nº 1. pp: 77-91 en marzo de 1952 a la edad de 25 años, la comunidad académica tardó diez años en darse cuenta de sus implicaciones. 38 años después de su publicación, en 1990, Markowitz obtuvo el Premio Nobel.

[3] Debido a que se utiliza el rendimiento esperado y la varianza de los títulos y carteras a este modelo también se le conoce como "modelo media-varianza"

Según esta teoría, se trata de buscar primeramente cuáles son las carteras que proporcionan el mayor rendimiento para un riesgo dado, al mismo tiempo que soportan el mínimo riesgo para un rendimiento conocido. A estas carteras se las denomina *eficientes*[4]. El conjunto de carteras eficientes se puede determinar resolviendo los programas cuadráticos y paramétricos, que se muestran en el cuadro de la figura 5.

	Programa 1	**Programa 2**
Función Objetivo	$\text{Máx } E_p = \sum_{1}^{n} X_i E_i$	$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}$
Restricciones paramétricas	$\sigma_p^2 = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} = V^*$	$E_p = \sum_{1}^{n} X_i E_i = E^*$
Restricciones presupuestarias	$\sum_{1}^{n} X_i = 1$	$\sum_{1}^{n} X_i = 1$
No negatividad	$\forall X_i \geq 0$	$\forall X_i \geq 0$

Fig.5 Programas cuadráticos y paramétricos de la Teoría de Selección de Carteras

En dicha figura E* y V* son los parámetros que varían (de ahí el que la programación se denomine *paramétrica*), lo que implica ir dándole valores a ambas variables para que el programa nos diga en todo momento cuál es la mejor cartera para cada valor de ambas variables. Por lo tanto, el resultado de ambos programas será el conjunto de carteras eficientes, que tiene forma de curva cóncava y que recibe el nombre de *frontera eficiente* (*efficient set*) por estar formada por la totalidad de las carteras eficientes (fig.6). En la frontera eficiente, pues, están todas las carteras que proporcionan el máximo rendimiento con un riesgo mínimo.

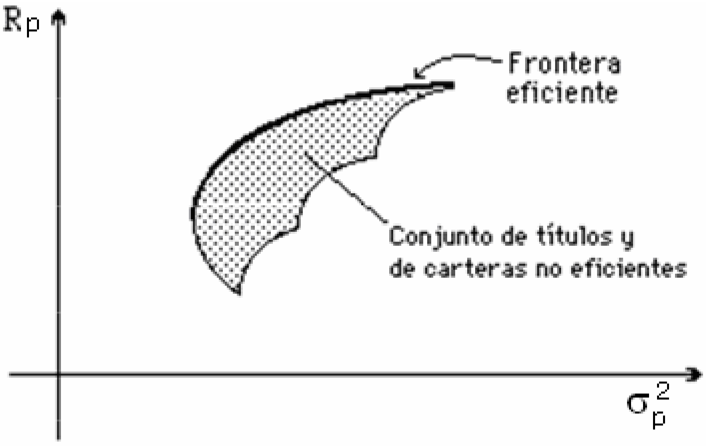


Fig.6 La frontera eficiente (conjunto de carteras que proporcionan el máximo rendimiento y soportan el mínimo riesgo)

[4] Porque "eficiencia" significa maximizar el *output* para un *input* dado o minimizar éste último para un *output* dado. Aquí el *output* es el rendimiento esperado y el *input* el riesgo.

Para determinar la cartera óptima de un inversor en particular necesitaremos especificar sus *curvas de indiferencia*[5] entre el rendimiento y el riesgo asociado, cuya forma dependerá de su función de utilidad y ésta será, naturalmente, distinta para cada inversor. Por ejemplo, en la figura 7 izquierda, al inversor le será indiferente elegir entre el punto A o el punto B en la curva de indiferencia I_1, pues, aunque B promete un mayor rendimiento que la cartera A, su riesgo es superior al de ésta última. Sin embargo, si tiene que elegir entre las carteras A y A´ elegirá ésta última, debido a que con el mismo riesgo obtiene un mayor rendimiento (A´>A).

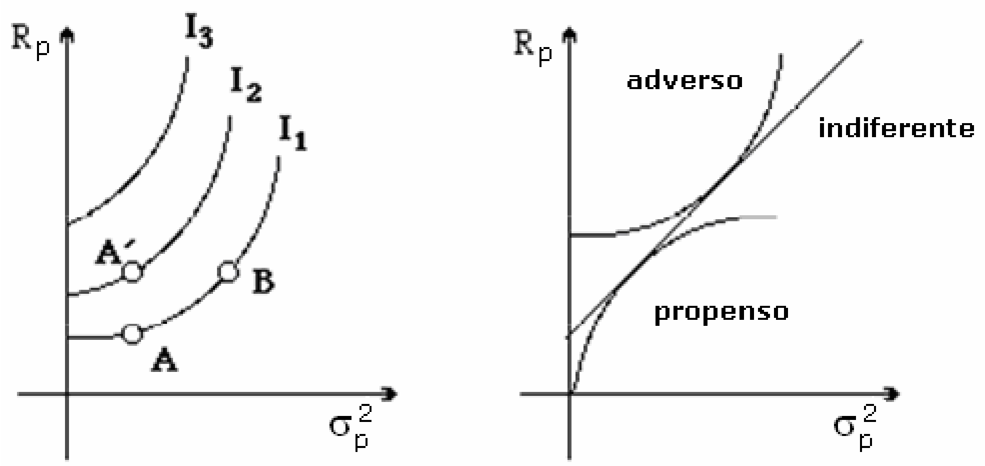


Fig.7 Curvas de indiferencia

En la figura de la derecha se observan las gráficas de las curvas de indiferencia de diferentes inversores: el *adverso* al riesgo, que es el caso más corriente (por cada unidad de riesgo adicional hay que prometerle un rendimiento marginal cada vez más grande); el *indiferente* (por cada unidad de riesgo adicional hay que prometerle el mismo rendimiento marginal); y, por último, el *propenso* al riesgo, que por un mínimo rendimiento marginal está dispuesto a correr cada vez mayores riesgos.

Expresado de otra forma. Si asumir más riesgo es el precio que debemos pagar por la oportunidad de ser más ricos, entonces el inversor puede utilizar el concepto de utilidad marginal para decidir qué cartera de la *frontera eficiente* debe seleccionar. El inversor asciende por la curva de indiferencia buscando mayores rendimientos esperados hasta que el riesgo adicional para ganar un euro más sea un precio demasiado alto para él o ella. La sensibilidad del inversor a las variaciones de la riqueza y el riesgo se conoce como la "función de utilidad".

Si ahora superponemos el gráfico representativo de la frontera eficiente (la figura 6) con el de las curvas de indiferencia de un inversor determinado (la figura 7 izquierda) obtendremos la *cartera óptima* del mismo, que vendrá dada por el punto de tangencia de una de las líneas de indiferencia con la frontera eficiente (fig.8). Obsérvese que las curvas de indiferencia de los adversos al riesgo son convexas mientras que la *frontera eficiente* tiene forma cóncava.

---

[5] Las *curvas de indiferencia* son el lugar geométrico que describe todas las combinaciones posibles de las cantidades de dos bienes que le proporcionan al consumidor el mismo nivel de utilidad o satisfacción.

ISSN: 1988-1878

Sustituyendo ahora E_0 y V_0 en los correspondientes programas cuadráticos y paramétricos (figura 5), obtendremos los valores de las proporciones en las que tenemos que distribuir el presupuesto de inversión para obtener la cartera óptima del inversor al que hemos hecho referencia anteriormente. No olvidemos que la frontera eficiente es algo objetivo, mientras que las curvas de indiferencia son de tipo subjetivo; dicho de otra forma: la frontera eficiente es igual para todos los inversores no así la cartera óptima, que será distinta para cada inversor.

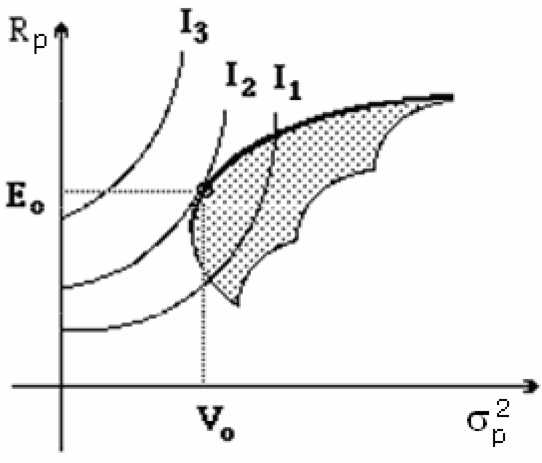


Fig.8 Determinación de la cartera óptima

Así, por ejemplo, supongamos que tenemos cinco empresas con los consiguientes rendimientos y riesgos asociados (supondremos que sus rendimientos son independientes entre sí, es decir, no hay correlación entre ellos):

	E_i	σ_i
Banco	10%	2%
Electricidad	20%	11%
Petróleo	12%	4%
Transportes	15%	7%
Industrial	18%	8%

Introduciendo estos datos en los programas cuadráticos y paramétricos vistos anteriormente obtendremos los valores representativos de la frontera eficiente, once de los cuales figuran a continuación:

E_p	10,56	11,10	11,64	12,18	12,72	13,26	13,80	14,33	14,87	15,41
σ_p	1,74	1,68	1,70	1,80	1,97	2,20	2,46	2,74	3,05	3,37

Por último, supongamos que un inversor determinado desea saber cuál sería la composición de su cartera óptima en dos escenarios distintos: a) con un rendimiento esperado del 12%, y b) con un rendimiento esperado del 15%. Los resultados se muestran a continuación:

	Xi	Xi
Banco	58,50%	14,08%
Eléctrica	5,07%	15,66%
Petrolera	19,37%	26,50%
Transportes	8,65%	19,91%
Industrial	8,40%	23,86%
Ep =	**12,00%**	**15,00%**
σp =	**1,76%**	**3,12%**

Probablemente el aspecto más importante del trabajo de Markowitz fue mostrar que no es el riesgo de un título (medido por la varianza de sus rendimientos) lo que debe importar al inversor sino la contribución que dicho título hace al riesgo (varianza) de la cartera. Esto es una cuestión de su covarianza con respecto al resto de los títulos que componen la cartera. De hecho, el riesgo de una cartera depende de la covarianza de los activos que la componen y no del riesgo promedio de los mismos.

De esta manera la decisión de poseer un título o activo financiero no debe tomarse únicamente comparando su rendimiento esperado y su varianza con respecto a los otros, sino que depende de los otros activos que desee poseer. En resumen, los activos no deben valorarse de forma aislada sino en conjunto. Esta idea es hoy algo aceptado universalmente por los gestores de fondos.

5. Mejorando la utilidad del modelo. El modelo diagonal de Sharpe

El principal problema del modelo "media-varianza" de Markowitz, de cara a su utilidad práctica, radicaba en la cantidad de cálculos que era necesario hacer para llevarlo a cabo[6]. Recordemos que si queremos analizar las carteras eficientes formadas por 1.500 activos financieros (algo normal) necesitamos estimar previamente 1.500 rendimientos esperados, 1.500 varianzas y $1.500^2 - 1.500 = 2.248.500$ covarianzas.

Buscando facilitar la aplicación práctica de su modelo, Markowitz, encargó a uno de sus doctorandos William F. Sharpe que investigara sobre las correlaciones que parecían tener los títulos del mercado entre sí. Efectivamente, Sharpe, observó que los títulos que componen las carteras de valores parecían estar sujetos a influencias comunes, por lo que postuló que los rendimientos de los títulos suelen estar positivamente correlacionados. Esto le llevó a introducir una importante simplificación, al considerar que los rendimientos de los diferentes valores están relacionados con un índice general (el de la Bolsa, el índice general de precios, etc.) y que la correlación entre los rendimientos de los diversos valores se deriva de su relación

[6] Sobre todo en los años 50 a 80 del pasado siglo XX. Si el modelo hubiera sido desarrollado hoy en día posiblemente no hubiera tenido tantos problemas de implementación gracias a la gran potencia de cálculo de los computadores actuales. Pero en aquellos tiempos su viabilidad era muy incierta.

con dicho índice. El modelo así diseñado recibe el nombre de *modelo diagonal*[7], y se expresa de la siguiente forma:

$$R_i = a_i + b_i I + \varepsilon_i$$

R_i = Rendimiento del activo i
a_i = Rendimiento del activo i que es independiente del mercado (parámetro a estimar)
b_i = Coeficiente de regresión a estimar, que expresa la variación de R_i, que depende de la variación del índice I
I = Índice de la Bolsa
ε_i = Perturbación aleatoria, que expresa la variación de R_i, que depende de las características especificas del titulo i, siendo independiente del mercado.

En palabras de Sharpe, la principal característica del modelo diagonal es el supuesto de que los rendimientos de varios activos están relacionados entre sí únicamente a través de su común relación con algún factor subyacente básico. Este factor puede ser un índice general de la bolsa, el PNB, el IPC, etcétera, pero debe representar la principal influencia sobre el rendimiento de los activos (el índice general de la bolsa es, normalmente, el factor que más influye en los rendimientos de los activos).

El procedimiento de Sharpe elimina el tedioso cálculo entre las covarianzas de cada pareja de activos. El analista sólo necesita calcular las relaciones entre cada uno de los activos y el factor dominante. Si el precio de un activo es más volátil que los movimientos de dicho factor, ese activo hará la cartera más variable y. por ende, más arriesgada; y lo contrario. En una cartera bien diversificada la media simple de estas relaciones servirán para estimar la volatilidad de la cartera como un todo.

Así, si disponemos de 1.500 activos, habrá que calcular 1.500 parámetros a_i, 1.500 parámetros b_i, 1.500 varianzas, la esperanza matemática del índice y su varianza. En total 3 x 1.500 + 2 = 4.502 estimaciones (¡500 veces menos que los necesarios según el modelo "media-varianza" de Markowitz!).

Las implicaciones de esta idea son muy importantes. Si el inversor desea adquirir un activo determinado no podrá evitar el riesgo de poseer activos en general. Es decir, si usted adquiere únicamente acciones del BBVA, sin hacerlo, está invirtiendo también en el índice general de la bolsa española.

5.1 Cómo se obtiene el modelo diagonal

Los parámetros del modelo diagonal (a_i, b_i) se obtienen a través de una regresión lineal por el método de mínimos cuadrados. De esta forma, el rendimiento esperado

[7] SHARPE, William (1961): "A Simplified Model for Portfolio Analysis" *Management Sciences* 9, nº 2, enero, pp.: 277-293. Sharpe tenía 26 años cuando escribió este artículo que de por sí ya le hubiera hecho ser uno de los académicos financieros que más han influido en los mercados de valores al posibilitar el desarrollo práctico de la teoría de selección de carteras. Pero fue su posterior desarrollo del CAPM lo que le llevó a compartir con su maestro el Nobel en 1990. El nombre de "modelo diagonal" hace referencia a que en la matriz de varianzas-covarianzas, éstas últimas son iguales a cero, en el modelo de Sharpe, quedando únicamente las varianzas que forman la diagonal de dicha matriz (vea el subepígrafe 3.2).

de un activo cualquiera (E_i) y su riesgo (σ^2_i) vienen dados por las siguientes expresiones:

$$E_i = a_i + b_i\, E[I]$$

$$\sigma^2_i = b^2_i\, \sigma^2_I + \sigma^2_{\varepsilon i}$$

Observe la segunda expresión. Al riesgo del título (σ^2_i) también se le conoce como "riesgo total" de dicho título. Al producto $b^2_i\, \sigma^2_I$ se le conoce como "riesgo sistemático" del título, mientras que a $\sigma^2_{\varepsilon i}$ se le denomina "riesgo específico o propio" del título.

En el caso de calcular el rendimiento esperado (E_p) y el riesgo de una cartera (σ^2_p), tendremos:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} X_i a_i + E[I] \sum_{i=1}^{n} X_i b_i = a_p + E[I]\, b_p$$

$$\sigma^2_p = b^2_p\, \sigma^2_I + \sum_{i=1}^{n} X_i^2\, \sigma^2_{\varepsilon i}$$

Ejemplo: Vamos a aplicar el *modelo diagonal* a Endesa y Gas Natural durante los doce días hábiles que van desde el 31 de enero al 16 de febrero de 2007. Tomamos sólo trece valores para facilitar la exposición.

En la tabla aparecen los precios de ambas compañías junto al valor del Índice General de la Bolsa de Madrid (IGBM). En las columnas 5 y 6 aparecen los rendimientos diarios de ambas compañías calculados según P_t/P_{t-1} -1. En las dos últimas columnas aparecen las covarianzas de ambas compañías con respecto al IGBM; este cálculo se hace así: $(R_{end\ t} - E_{end}) \times (R_{gn\ t} - E_{gn})$. El valor medio de este producto es la covarianza. Abajo aparecen los valores medios del Índice y de los rendimientos de las empresas junto a sus varianzas.

Para calcular b_i se divide la covarianza entre la varianza del mercado:

$$b_{end} = \sigma_{end,IGBM} / \sigma^2_{IGBM} = 0{,}027845 / 173{,}33 = 0{,}000160653$$
$$b_{gn} = \sigma_{gn,IGBM} / \sigma^2_{IGBM} = -0{,}051618 / 173{,}33 = -0{,}00029781$$

Los valores del parámetro a_i se obtiene por diferencia:

$$a_{end} = E_{end} - b_{end}\, E(I) = -0{,}0874\% - 0{,}000160653 \times 1.644{,}55 = -0{,}265076$$
$$a_{gn} = E_{gn} - b_{gn}\, E(I) = 0{,}7313\% - (-0{,}00029781) \times 1.644{,}55 = 0{,}497076$$

Días	**Endesa**	**GN**	**IGBM**	**Rdto END**	**Rdto GN**	**Cov END-I**	**Cov GN-I**
31-ene	38,57	30,65	1.612,11				
01-feb	38,41	30,66	1.616,35	-0,4148%	0,0326%	0,092329	-0,033858
02-feb	39,04	30,85	1.623,67	1,6402%	0,6197%	-0,360745	-0,147656
05-feb	38,10	31,60	1.623,72	-2,4078%	2,4311%	0,483351	-0,524637
06-feb	37,90	32,33	1.634,70	-0,5249%	2,3101%	0,043098	-0,236182
07-feb	37,99	32,97	1.651,02	0,2375%	1,9796%	0,021018	0,133717
08-feb	38,01	32,72	1.646,96	0,0526%	-0,7583%	0,003375	-0,016161
09-feb	38,01	33,20	1.652,17	0,0000%	1,4670%	0,006662	0,118433
12-feb	38,03	33,20	1.650,00	0,0526%	0,0000%	0,007632	0,004764
13-feb	38,12	33,11	1.648,53	0,2367%	-0,2711%	0,012896	-0,007308
14-feb	38,15	33,24	1.651,04	0,0787%	0,3926%	0,010781	0,031152
15-feb	38,12	33,22	1.656,03	-0,0786%	-0,0602%	0,001010	0,003130
16-feb	38,15	33,43	1.652,22	0,0787%	0,6321%	0,012741	0,055185
		Media:	1.644,55	-0,0874%	0,7313%	0,027845	-0,051618
		Varianza:	173,33	0,000075	0,000104		
		D típica	13,17	0,8651%	1,0203%		
		b_i		**0,000160653**	**-0,00029781**		
		a_i		**-0,265076**	**0,497076**		
		Riesgo sistemático		0,000004	0,000015		
		Riesgo específico		0,000070	0,000089		

Con estos datos podemos calcular el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera formada por ambas compañías a través de las siguientes expresiones:

E_p = -0,0874% X_{end} + 0,7313% X_{gn}

$\sigma^2_p = [(0{,}000160653\ X_{end} + (-0{,}00029781)\ X_{gn})^2 \times 173{,}33] + [0{,}00007\ X_{end}^2 + 0{,}000089\ X_{gn}^2]$

Una vez que disponemos de las ecuaciones que modelizan las combinaciones del rendimiento y del riesgo de la cartera formada por Endesa y Gas Natural, podemos ir dando valores a las ponderaciones de dicha cartera (X_{end} e X_{gn}) y dibujar la curva que aparece en la figura 9.

Si, por ejemplo usted desea elegir aquella combinación que le proporciona el menor riesgo verá que la combinación 58% de Endesa y 42% de Gas Natural es la adecuada (su riesgo medido por la desviación típica es del 0,62789% diario) que le proporciona un rendimiento medio diario del 0,256%. Además con arreglo a esta información usted sabe que las mejores combinaciones (las carteras eficientes) se componen con un mínimo de un 42% de Gas Natural (y, por tanto, un máximo del 58% de Endesa) hasta el 100% de ésta. Estas combinaciones le proporcionan el mayor rendimiento para un riesgo dado. Cualquier otra que tenga más del 58% de Endesa le proporcionará, a igualdad de riesgo, un menor rendimiento.

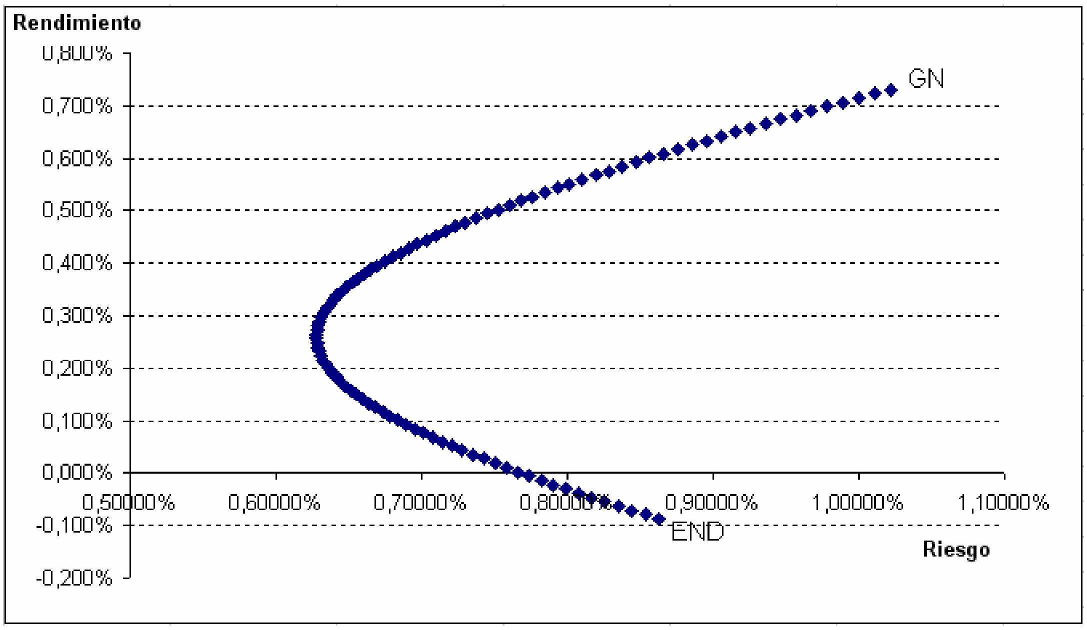


Fig.9 Combinaciones rendimiento-riesgo de Endesa y Gas Natural

6. La diversificación del riesgo

Hemos visto que la expresión general del riesgo total de una cartera de valores según el modelo diagonal de Sharpe es igual a:

$$\sigma^2_p = b^2_p\, \sigma^2_I + \sum_{i=1}^{n} X_i^2\, \sigma_{\varepsilon i}^2$$

Ahora concentrémonos en la expresión del riesgo específico:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2\, \sigma_{\varepsilon i}^2$$

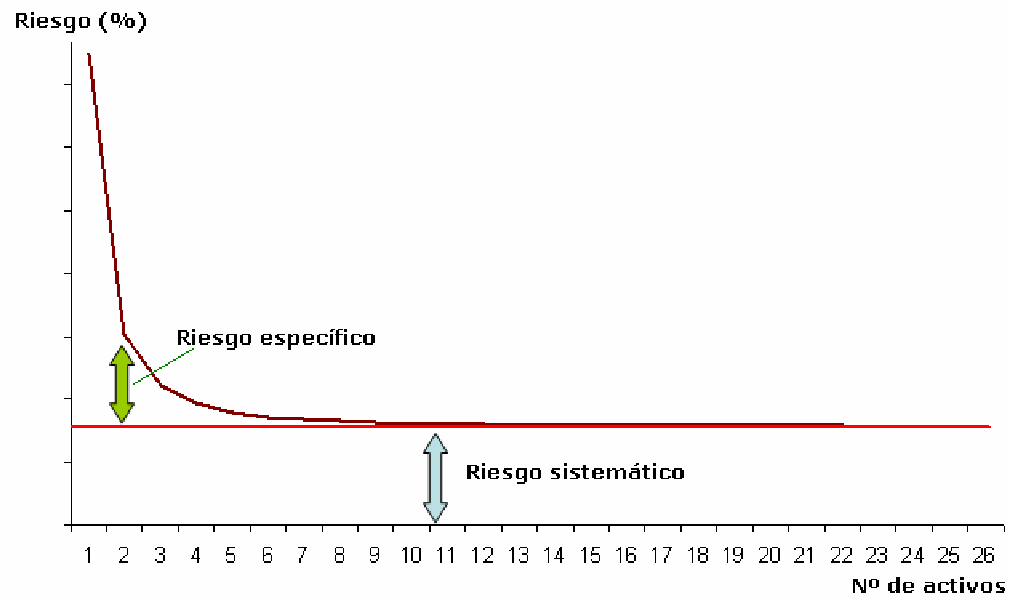
e imaginémonos que invertimos por igual nuestro presupuesto de inversión en 1.000 activos diferentes. Como vamos a invertir la misma cantidad en cada activo dedicaremos un X_i = 1/1.000 de nuestro dinero a cada uno de ellos. Observe que en la expresión anterior X_i está elevada al cuadrado lo que significa que, sacando factor común, la suma de las varianzas de los errores de los mil activos estará multiplicada por 0,000001 haciendo casi despreciable el resultado final. Si aumentamos a 10.000 activos el resultado será aún más pequeño. Así que concluyamos, si n tiende a infinito X_i tiende a valer cero, lo mismo que el riesgo específico.

Matemáticamente expresado y suponiendo que todas las X_i son iguales a X e igual a su vez a 1/n (n es el número de activos), el riesgo específico quedaría así:

$$\text{Riesgo específico} = \sum_{i=1}^{n} X^2\, \sigma_{\varepsilon i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = n \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{K}{n}$$

donde K es el valor de la suma de los riesgos específicos de los n valores medidos por la varianza. Si n → ∞ el riesgo específico → 0.

En la figura 10 se puede observar esto mismo. En ella se ha representado el valor del *riesgo total* de una cartera formada por **n** activos con idénticas ponderaciones (1/n). Conforme aumentamos el número de activos (es decir, aumentamos la *diversificación*), el riesgo total va descendiendo hasta alcanzar un valor determinado, por debajo del que es imposible reducir el riesgo mediante diversificación. Este valor del riesgo que es imposible de reducir mediante la diversificación se denomina *riesgo sistemático* o *riesgo de mercado*.



Recapitulemos, los riesgos se pueden clasificar en:

a) Riesgos diversificables o *específicos*, si a través de la diversificación pueden llegar a ser prácticamente despreciables como, por ejemplo, el *riesgo del proyecto* (*project risk*), indicativo de la posibilidad de equivocarse al calcular la demanda esperada de un producto; el *riesgo competitivo* (*competitive risk*), indicativo de la dificultad de calcular la fuerza de la competencia; o el *riesgo del sector* (*sector risk*), que indica las variaciones del rendimiento debidas a variables que afecten exclusivamente al sector en el que opera la compañía.
b) Riesgos no diversificables o *sistemáticos*, que pueden reducirse algo a través de la diversificación pero nunca eliminarse y a los que también se conoce como *riesgos de mercado* (*market risk*) como, por ejemplo, una recesión eco-

nómica, una caída bursátil o una subida de los tipos de interés afectan negativamente a casi todas las empresas.

El concepto de que una parte del riesgo se puede eliminar mediante una adecuada diversificación es un concepto básico de las finanzas porque implica que si un inversor corre un riesgo diversificable lo corre porque él o ella lo desean, luego no tendrán ninguna compensación por ello. Sólo se compensa el riesgo sistemático o no diversificable mediante un aumento del rendimiento esperado (la *prima de riesgo*). Así que se dice que una persona es un *diversificador eficiente* cuando ha invertido en el suficiente número de activos tal que el riesgo específico de su cartera es despreciable[8].

Bibliografía

BERNSTEIN, Peter (2005): *Capital Ideas*. John Wiley. Hoboken (NJ)

BODIE, Zvi; KANE, Alex y MARCUS, Alan (1999): *Investments*. McGraw Hill. Boston. 4ª ed.

BREALEY, Richard y MYERS, Stewart (2003): *Principios de Finanzas Corporativas*. McGraw Hill. Madrid. 7ª Ed.

ELTON, Edwin y GRUBER, Martin (1991): *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley. Nueva York. (4ª ed.)

EMERY, Douglas y FINNERTY, John (1991): *Principles of Finance*. West. Nueva York.

FABOZZI, Frank (1995): *Investment Management.* Prentice Hall. Nueva Jersey.

FARRELL, James (1997): *Portfolio Management*. McGraw Hill. Nueva York

GOMEZ-BEZARES, Fernando (1993): *Gestión de Carteras*. DDB Biblioteca de Gestión. Bilbao

RUBINSTEIN, Mark (2006): *A History of the Theory of Investments*. John Wiley. Hoboken (NJ)

RUTTERFORD, Janette (1983): *Introduction to Stock Exchange Investments*. MacMillan. Londres.

SHARPE, William; ALEXANDER, Gordon; y BAILEY, Jeffery (1998): *Investments*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). (6ª ed.)

SUAREZ, Andrés (2004): *Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa.* Pirámide. Madrid. 20ª ed.

[8] En realidad no hace falta adquirir más allá de 20 activos, que estén poco correlacionados entre sí, para diversificar adecuadamente una cartera