El método binomial de valoración de opciones

© Juan Mascareñas
Universidad Complutense de Madrid
Versión inicial: enero 1994 - Ultima Revisión: octubre'00

Cox, Ross y Rubinstein desarrollaron este método de valoración de opciones, que tiene la ventaja de que, además de ser muy intuitivo, utiliza una matemática muy sencilla. Para mostrar su funcionamiento vamos a aplicarlo a la valoración de acciones ordinarias y para hacer más simple la exposición comenzaremos suponiendo que la acción no reparte dividendos.

1. El método binomial para un período

Supongamos que el valor actual de una acción ordinaria es de 100 €, y que dentro de un período dicho título puede tomar un valor de 120 €, o bien, haber descendido hasta los 90 €. La probabilidad de que ocurra un resultado u otro no importa, sólo interesa el abanico de resultados posibles. Si adquirimos por **c** euros una opción de compra europea sobre dicha acción ordinaria con vencimiento dentro de un período y precio de ejercicio 100 €, sabemos que podrá valer 20 euros, si el precio de la acción se sitúa en 120 €; o bien 0 euros si la cotización de la acción desciende a 90 € (véase la figura 1).

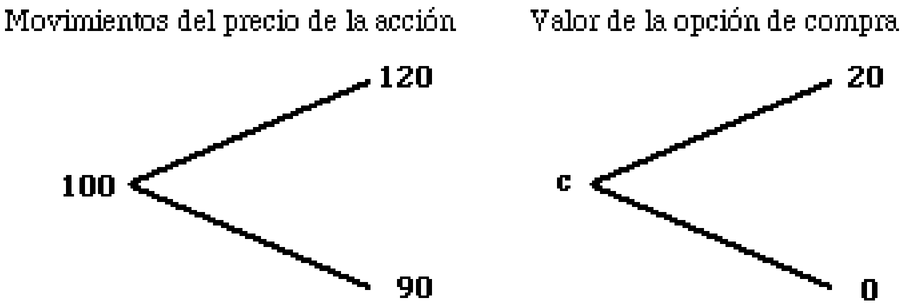

Fig.1 Precios de la acción ordinaria y valores de su opción de compra

Existe una combinación, consistente en adquirir un número determinado de acciones ordinarias al mismo tiempo que se emite una opción de compra sobre ellas, tal que la cartera formada proporcionará el mismo flujo de caja tanto si el precio de la acción ordinaria asciende como si desciende. Esta combinación es importante porque pase lo que pase con el precio de la acción ordinaria, el flujo de caja de la cartera será siempre el mismo, es decir, no variará y, por tanto, será cierto; en otras palabras carecerá de riesgo. A dicha combinación se la denomina cartera de arbitraje, ratio de cobertura o *delta* de la opción.

Así pues, si H es el número de acciones ordinarias que compramos por cada opción de compra emitida tendremos que si:

a) El valor de la acción ordinaria dentro de un período es de 120 €, y el de la opción de compra, 20 €. Por tanto, el flujo de caja de la cartera será igual a sumar el valor de mercado de las acciones y restarle el valor intrínseco de la opción de compra: H x 120 - 20

b) El valor de la acción ordinaria dentro de un período es de 90 € y el de la opción de compra, 0 € (la opción no será ejercida y, por tanto, su valor es nulo). El flujo de caja de la cartera de arbitraje será igual a: H x 90 - 0

De donde igualando ambos flujos de caja y despejando H obtendremos un valor igual a 2/3.

$$120\,H - 20 = 90\,H - 0 \rightarrow H = 2/3$$

Esto es, la cartera formada por 2/3 de una acción ordinaria y la venta de una opción de compra sobre ella[1] no tiene ningún riesgo (pase lo que pase siempre tendrá el mismo valor) y, por tanto, el rendimiento que se obtendrá con ella, a lo largo del periodo considerado, obligatoriamente[2] será un rendimiento sin riesgo (R_f):

$$\frac{\text{Flujo de caja}}{\text{Inversión}} = 1 + R_f$$

De tal manera que si, por ejemplo, el precio de la acción fuese de 120 € y el tipo libre de riesgo durante ese período fuese del 6%, tendríamos que el valor del flujo de caja sería: 2/3 x 120 - 20 = 60 €, y el de la inversión: 2/3 x 100 - c. Así pues, despejando c de la siguiente ecuación obtendremos el valor actual de la opción de compra:

$$\frac{60}{2/3 \times 100 - c} = 1 + 0{,}06 \rightarrow c = 10{,}0629$$

Si la opción de compra valiese en el mercado 11 € deberíamos vender una opción de compra y adquirir 2/3 de una acción ordinaria con lo que, aunque el flujo de caja sería de 60 € (igual que antes, pues en su cálculo nada tiene que ver el precio de compra de la opción), obtendríamos un rendimiento sin riesgo superior al 6% (por lo que el arbitraje entraría en acción vendiendo masivamente opciones de compra y comprando acciones con lo que al final el rendimiento obtenido sería del 6%, momento en el que el arbitraje dejaría de actuar al no conseguir ningún rendimiento extraordinario):

$$\frac{60}{2/3 \times 100 - 11} = 1{,}078 \rightarrow R_f = 7{,}8\%$$

Ahora que hemos visto cómo se calcula el ratio de cobertura a través de un ejemplo numérico vamos a obtenerlo a través de una fórmula. Para ello llamaremos S al precio de la acción subyacente en la actualidad, SU será el precio de la acción dentro de un período si es alcista, pues si fuese bajista se le denominaría SD (donde U y D son los coeficientes por los que hay que multiplicar el valor actual de la acción, S, para obtener

[1] O si se prefiere, la cartera formado por 2 acciones ordinarias y la venta de 3 opciones de compra de ellas.
[2] Porque si no el arbitraje se encargará de poner las cosas en su sitio.

su precio al final del período). Por otra parte, el precio de la opción de compra en la actualidad sería **c**, siendo c_u y c_d, respectivamente, para los casos en que el precio de la acción ordinaria haya ascendido o haya bajado (véase la figura 2).

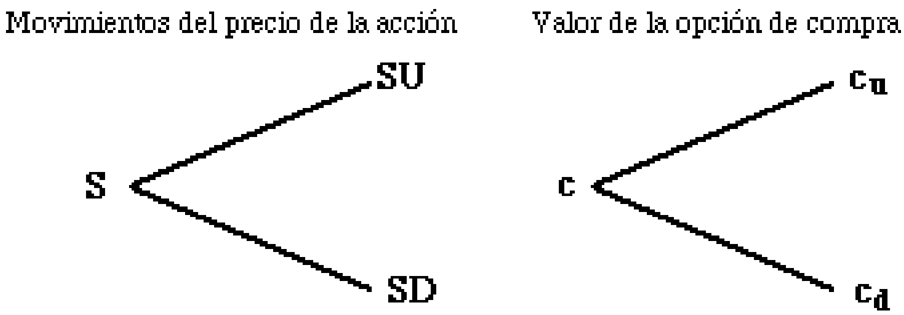

Fig.2 Precios de la acción ordinaria y valores de la opción de compra

El flujo de caja esperado al final del período será:

a) Si los precios suben: H x SU - c_u

b) Si los precios bajan: H x SD - c_d

Igualando ambas ecuaciones y despejando H, obtendremos el valor del *ratio de cobertura*:

$$\boxed{H = \frac{c_u - c_d}{S \times (U - D)}}$$

Así, por ejemplo, si sustituimos las variables por los valores que manejábamos en el caso anterior y donde U = 1,2 y D = 0,9 obtendremos:

$$H = \frac{20 - 0}{100 \times (1{,}2 - 0{,}9)} = 2/3.$$

Si ahora pretendemos obtener una expresión que calcule el valor de la opción de compra (c) comenzaremos operando con la expresión de la rentabilidad obtenida a través de la relación existente entre el flujo de caja esperado (por ejemplo, H x SU - c_u) y la inversión inicial (H x S - c):

$$1 + R_f = \frac{H \times SU - c_u}{H \times S - c}$$

operando obtendremos:

$$HS + HSR_f - c - cR_f = HSU - c_u$$
$$HS\,(1 + R_f - U) + c_u = c(1 + R_f)$$

sustituyendo ahora H por su valor y eliminando S del denominador y del numerador:

$$\frac{c_u - c_d}{U - D}(1 + R_f - U) + c_u = c\,(1 + R_f)$$

Ahora, haciendo un alto en nuestra demostración, vamos a denominar:

a) $p = \dfrac{1 + R_f - D}{U - D}$

b) $1- p = \dfrac{U - (1 + R_f)}{U - D}$

Estos valores representan la *probabilidad implícita*[3] de ascenso (p) y la de descenso (1-p) del valor de la acción subyacente. Así, por ejemplo, si sustituimos en la ecuación de *p* las variables por los datos del ejemplo con el que venimos trabajando obtendremos dichas probabilidades:

p = (1 + 0,06 - 0,9) ÷ (1,2 - 0,9) = 53,33% de que ascienda
1-p = 46,66% de que descienda

Por tanto, si ahora retomamos nuestra demostración y sustituimos parte de la ecuación anterior por el valor de 1-p, obtendremos:

$$c_u - (c_u - c_d)\,(1 - p) = c(1 + R_f)$$

$$c_u\, p + c_d\, (1 - p) = c(1 + R_f)$$

ahora despejando **c**, obtendremos la expresión que calcula el valor actual de la opción de compra según el método binomial, que como se puede apreciar consiste en calcular la media ponderada de los flujos de caja proporcionados por la opción de compra tanto si el precio del activo subyacente asciende como si desciende, y utilizando como ponderaciones las probabilidades implícitas de que dicho precio del activo suba o caiga. Y todo ello actualizado al tipo libre de riesgo:

$$\boxed{c = \frac{c_u\, p + c_d\, (1 - p)}{1 + R_f}}$$

Concretando, el precio teórico de la opción de compra es igual al valor actual de la media ponderada de los flujos de caja que dicha opción proporciona en su fecha de vencimiento. Para demostrar que ésta es la ecuación que buscamos sustituiremos las variables por sus valores:

$$c = (20 \times 0{,}5333 + 0 \times 0{,}4666) \div (1{,}06) = 10{,}0629\ €$$

2. El método binomial para dos períodos

Con objeto de obtener el valor de la opción de compra europea[4] para varios períodos, primeramente vamos a aplicar el método binomial para un par de ellos. Así que si seguimos utilizando los datos del ejemplo que venimos manejando y seguimos suponiendo que el coeficiente de crecimiento del precio de la acción es U = 1,2 y que el de decrecimiento sigue siendo D = 0,9 podremos ver como, transcurridos un par de períodos, la cotización de la acción ordinaria ha podido ascender hasta un máximo de 144 €, o bien acabar descendiendo hasta un mínimo de 81 €, o tomar un valor intermedio de 108 €.

El valor de la opción de compra europea se calcula restando el precio de ejercicio (100 €) del valor de la acción al final del segundo período, sabiendo que si el resultado

[3] Esta especie de probabilidad es neutral al riesgo, es decir, no tiene nada que ver con la mayor o menor aversión que el inversor tenga al riesgo, entre otras cosas, porque, como hemos demostrado anteriormente, no hay riesgo si se utiliza la combinación de H acciones ordinarias y la venta de una opción de compra.

es negativo el valor de la opción será cero. Así, tendremos tres posibles valores de la opción de compra al final del segundo período: 44, 8 y 0 euros, respectivamente.

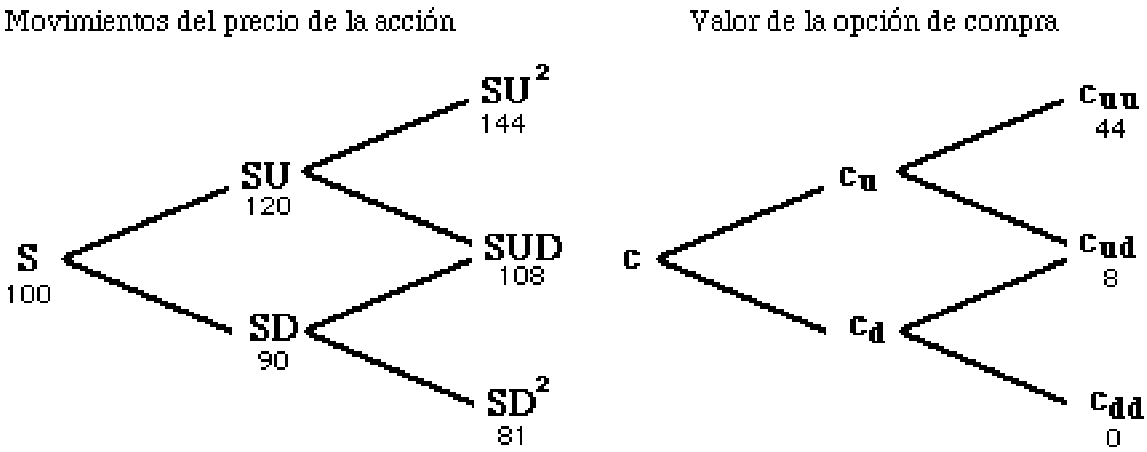

Fig. 3 Precios de la acción y valores de la opción en el caso de dos períodos

El proceso comenzará de derecha hacia la izquierda, periodo a periodo. Primeramente deberemos calcular valor de la opción de compra al final del primer período, tanto en el caso de ascenso de la cotización de la acción (c_u) como de descenso (c_d) en función de los posibles valores que pueda tomar la misma al final del segundo período. Para ello utilizaremos las expresiones matemáticas analizadas en el epígrafe anterior. Así, por ejemplo tendremos:

$$c_u = \frac{c_{uu}\ p + c_{ud}\ (1-p)}{1+R_f} = \frac{44 \times 0{,}533 + 8 \times 0{,}466}{1{,}06} = 25{,}66 \text{ euros}$$

$$c_d = \frac{c_{ud}\ p + c_{dd}\ (1-p)}{1+R_f} = \frac{8 \times 0{,}533 + 0 \times 0{,}466}{1{,}06} = 4{,}025 \text{ euros}$$

Una vez que tenemos estos dos valores podemos calcular el precio teórico de la opción de compra europea a través de la misma expresión matemática:

$$c = \frac{c_u\ p + c_d\ (1-p)}{1+R_f} = \frac{25{,}66 \times 0{,}533 + 4{,}025 \times 0{,}466}{1{,}06} = 14{,}68 \text{ euros}$$

---

[4] Aquella que sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento

Por tanto el valor de la opción de compra para dos períodos es de 14,68 €. Resumamos ahora todo el proceso: la valoración comienza con los flujos de caja del último período que son conocidos, luego se va retrocediendo hacia la izquierda hasta llegar al momento actual.

El procedimiento es muy sencillo aunque algo tedioso cuando hay muchos períodos. Esto último es importante, puesto que para obtener un valor realista de la opción necesitamos elegir U y D cuidadosamente y dividir el tiempo hasta el vencimiento en una multitud de pequeños subperíodos. Conforme vayamos aumentando el número de subperíodos y, por consiguiente, reduciendo el tiempo de los mismos pasaremos de considerar el tiempo como una variable discreta a considerarlo una variable continua. En realidad, para unos resultados válidos el tiempo hasta el vencimiento debería ser dividido al menos en unos 50 subperíodos.

Por otro lado, los ratios de cobertura deberán ser recalculados para cada nudo del grafo cuando hay dos o más períodos de tiempo. Así, por ejemplo:

$$\text{Nudo } c_u \rightarrow H = \frac{c_{uu} - c_{ud}}{S \times (U - D)} = \frac{44 - 8}{120 \times (1{,}2 - 0{,}9)} = 1$$

$$\text{Nudo } c_d \rightarrow H = \frac{c_{ud} - c_{dd}}{S \times (U - D)} = \frac{8 - 0}{90 \times (1{,}2 - 0{,}9)} = 0{,}297$$

$$\text{Nudo } c \rightarrow H = \frac{c_u - c_d}{S \times (U - D)} = \frac{25{,}66 - 4{,}025}{100 \times (1{,}2 - 0{,}9)} = 0{,}72$$

El ratio de cobertura del nudo c_u es igual a la unidad puesto que la opción de compra se encuentra claramente dentro de la zona "in the money" por lo que el flujo de caja será siempre positivo. Conforme el tiempo transcurre es necesario revisar el ratio de cobertura y si el tiempo hasta el vencimiento se divide en un gran número de subperíodos entonces el ratio de cobertura se puede utilizar para determinar la exposición al riesgo con bastante exactitud.

3. El modelo binomial para varios períodos

No es mi intención explicar la matemática que aplicada a una serie de períodos (basada en el triángulo de Pascal y en la combinatoria) proporciona la expresión de la binomial para la valoración de las opciones de tipo europeo. Como curiosidad mostraremos la expresión de la misma:

$$c = \frac{1}{(1+R_f)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ máx}\left\{ (SU^k D^{n-k} - X), 0 \right\} \right]$$

Casi todas las variables ya son conocidas a excepción de "n" que indica el número de pasos en los que se descompone el proceso binomial, y X que representa el valor del precio de ejercicio. En resumen, la expresión considera que la opción vale simplemente el valor actual de los flujos de caja esperados a lo largo de un árbol binomial con n pasos, cuyos principales supuestos básicos son:

1º. La distribución de los precios de las acciones es una binomial multiplicativa.
2º. Los multiplicadores U y D (y, por ende, las varianzas de los rendimientos) son los mismos en todos los períodos.
3º. No hay costes de transacción, por lo que se puede establecer una cobertura sin riesgo para cada período entre la opción y el activo sin necesidad de realizar ningún coste irrecuperable.
4º. Los tipos de interés sin riesgo se suponen constantes.

Es importante recalcar que no es necesario asumir que los inversores tengan una determinada actitud hacia el riesgo, de hecho el modelo supone una neutralidad ante el riesgo porque se puede construir una cartera de arbitraje que elimina totalmente el riesgo de la inversión. Si el valor de la opción no coincide con el calculado a través del modelo, entonces se puede conseguir un beneficio sin riesgo.

4. De la distribución binomial a la distribución logonormal

En el proceso de cálculo multiplicativo del modelo binomial podríamos suponer que el factor de descenso D es igual a la inversa del factor de ascenso U, lo que provocaría que los rendimientos del activo serían simétricos. Ahora bien, téngase en cuenta que para que esto suceda deberemos medir dicho rendimiento a través del logaritmo de la relación entre el precio en un momento determinado (S_t) y el del momento precedente (S_{t-1}).

Esto es así, debido a que si, por ejemplo, el precio de una acción durante tres instantes de tiempo consecutivos vale 100, 120 y 100 euros, respectivamente, sus rendimientos serán del 20% (es decir, 20÷100) y del -16,66% (es decir, -20÷120), como se observa el valor absoluto de ambas cantidades no es simétrico aunque el ascenso y descenso sea el mismo en euros, lo que cambia es la base sobre la que se calcula dicha variación. Sin embargo, si aplicamos el cálculo logarítmico obtendremos unos rendimientos de: Ln(120÷100) = 18,23% y Ln(100÷120) = -18,23%, lo que sí los hace simétricos. Por lo tanto, los precios que se distribuyen según una normal logarítmica tendrán unos rendimientos distribuidos normalmente, que serán calculados según la expresión:

$$r_t = \mathrm{Ln}\,(S_t \div S_{t-1})$$

En la figura 4 se muestra un ejemplo de un árbol binomial donde los coeficientes de ascenso y descenso son, respectivamente, U = 1,2 y D = 1/U = 0,833, que se extiende a lo largo de seis períodos y que comienza con un valor de la acción de 100 €. La amplitud de un árbol binomial dependerá del tamaño de U y del número de pasos en los que se descompone. El supuesto equivalente para un activo cuyos rendimientos se distribuyen según una normal, es que la varianza de los rendimientos es constante en cada período. Así, si la varianza del período es σ^2, la varianza para t años será $\sigma^2 t$. Mientras que la desviación típica será σ t a la que se le suele denomin ar *volatilidad* del activo.

						2986
					2488	
				2073		2073
			1728		1728	
		1440		1440		1440
	1200		1200		1200	
1000		1000		1000		1000
	833		833		833	
		694		694		694
			579		579	
				482		482
					402	
						335

Fig.4 Árbol binomial de seis períodos y distribución de los precios

Si σ es la desviación típica de los rendimientos por período, t el número de años hasta el vencimiento y n el número de períodos en los que se subdivide t, el proceso binomial para el activo proporciona unos rendimientos normalmente distribuidos en el límite si:

$$U = e^{\sigma \sqrt{(t/n)}} \quad y \quad D = 1/U = e^{-\sigma \sqrt{(t/n)}}$$

Así, por ejemplo, si S = 1.000 €.; σ = 0,3; t = 0,5 años; R_f = 10% y n = 10 iteraciones (es decir, cada subperíodo es igual a 0,05 años):

$$U = e^{0,3 \sqrt{(0,5/10)}} = 1,06938 \quad y \quad D = 1/U = 0,93512$$

además, según las ecuaciones que vimos en el primer epígrafe obtendremos unos valores de las probabilidades neutrales al riesgo iguales a (el tipo de interés sin riesgo semestral es el 5%):

p = [(1+ (0,05/10)) – 0,93512] / (1,06938 – 0,93512) = 0,5204
1-p = 0,4796

Las distribuciones normal-logarítmicas de los precios tienen una forma semejante a una campana asimétrica y podemos pensar que conforme el tiempo va transcurriendo la distribución se va ampliando, lo mismo que le ocurre al árbol binomial. Como se aprecia en la figura 5 en la que se muestra una opción de compra *out-of-the-money*, comenzando en el momento cero cuando el precio de la acción subyacente es S, conforme el tiempo pasa la distribución se amplia hasta que una parte de ella supera, o no, al precio de ejercicio (E) en la fecha de vencimiento. En dicha fecha, los flujos de caja de la opción se representan por la zona sombreada que se encuentra por encima de E. El valor actual de la opción de compra según el método de Black y Scholes es sencillamente el valor actual de dicho área.

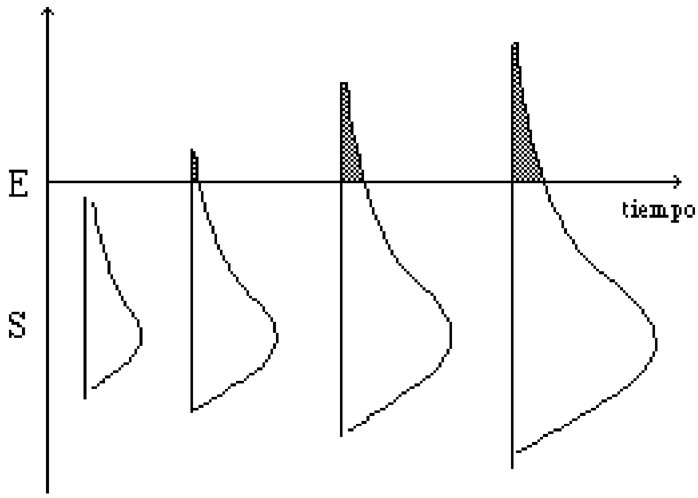

Fig.5 El valor de la opción aumenta conforme la distribución del precio aumenta al transcurrir el tiempo

5. La valoración de las opciones de venta

En este epígrafe vamos a valorar una opción de venta (*put option*) teniendo en cuenta que puede ejercerse anticipadamente, si se trata de una de tipo americano, y que este ejercicio anticipado puede ser preferible a esperar a ejercerla en la fecha de vencimiento.

En la figura 6 se muestra el esquema de los posibles movimientos de la acción ordinaria y del valor de la opción de venta en la fecha de vencimiento (para un precio de ejercicio igual a 100 €). Para calcular el valor de la opción de venta en el momento actual actuaremos de la misma manera que en el caso de la opción de compra.

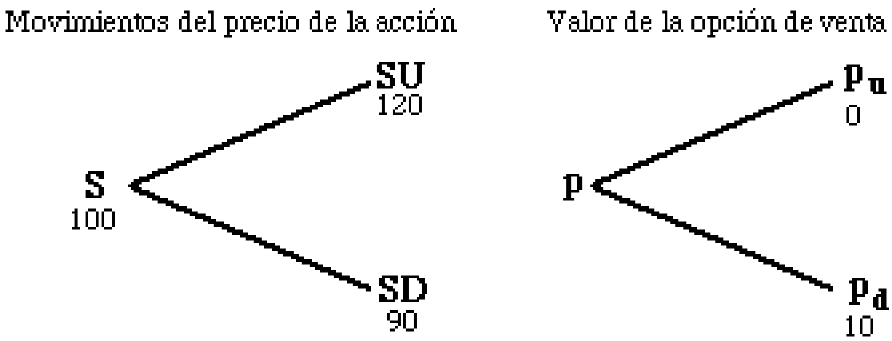

Fig.6 Distribución de los precios de la acción ordinaria y de los valores de la opción de venta

La cobertura se puede obtener vendiendo un número determinado de acciones ordinarias y una opción de venta, simultáneamente. Sin embargo, para ser consistentes con la obtención del precio de las opciones de compra, supondremos que se adquirirán h_p acciones, dónde h_p será el ratio de cobertura que tendrá signo negativo. Así pues:

a) Si el valor de la acción dentro de un período asciende, el valor del flujo de caja será $h_pSU - P_u$
b) Si el valor de la acción dentro de un período desciende, el valor del flujo de caja será $h_pSD - P_d$

Igualando ambas ecuaciones y despejando h_p, obtendremos el valor del ratio de cobertura:

$$h_p = \frac{P_u - P_d}{S \times (U - D)}$$

Así, por ejemplo, si sustituimos las variables por los valores que manejábamos en el caso anterior: h_p = (0 - 10) ÷ [100 x (1,2 - 0,9)] = -1/3.

Si ahora repetimos los mismos desarrollos matemáticos que para las opciones de compra llegaremos a la expresión que nos da el valor de la opción de venta (P):

$$P = \frac{P_u\ p + P_d\ (1 - p)}{1 + R_f}$$

Sustituyendo los valores del ejemplo y sabiendo que la *probabilidad intrínseca de ascenso* p se calcula de la misma forma que en el caso de la opciones de compra, obtendremos:

P = (0 x 0,5333 + 10 x 0,4666) ÷ (1,06) = 4,4025 €

Si ahora quisiéramos comprobar la paridad "put-call" no tendremos más que sustituir en las expresión:

P = C - S + VA(E) = 10,06295 - 100 + (100 ÷ 1,06) = 4,4025 €

En el esquema de la figura 7 se muestra el valor de la opción de venta de tipo europeo cuando hay dos períodos. El cálculo comienza por los valores de la derecha que son obtenidos a través de la conocida expresión Máx{E-S,0}, luego nos moveremos hacia la izquierda calculando los valores de las opciones de venta (P_u y P_d) para terminar con el cálculo de la opción de venta europea hoy (**P** = 3,682). Si calculásemos el valor de la opción de venta americana la cosa cambiaría puesto que P_u = 0 y P_d = 10 (es decir, al poder ejercer la opción de venta ganamos 10 €, mientras que si no pudiésemos hacerlo el valor teórico de la opción sería 8,3647 €, con lo que está claro que se ganan 1,6353 € si se puede ejercer la opción), lo que proporciona un valor de P = 4,4025 €. Con ello se comprueba como el valor de la opción de venta americana es superior al valor de la opción de venta europea.

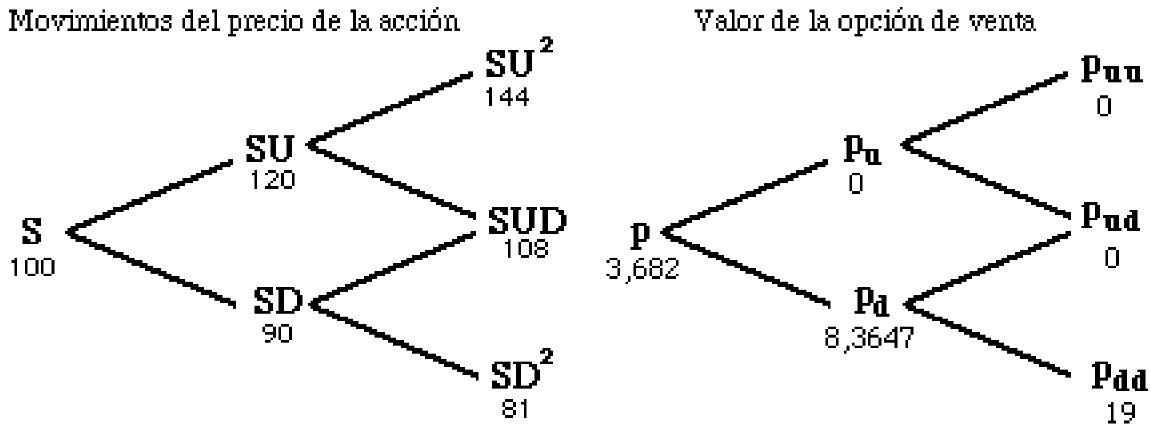

Fig.7 Distribución de los precios de la acción ordinaria y de los valores de la opción de venta de tipo europeo en el caso de dos períodos

Bibliografía

COX,J., ROSS,S., y RUBINSTEIN,M.: "Options pricing: a simplified approach". *Journal of Financial Economics*. nº 7. 1979. Págs.: 229-263

COX,J., y RUBINSTEIN, M.: *Options Markets*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). 1985

DIEZ, Luis y MASCAREÑAS, Juan: *Ingeniería Financiera*. McGraw Hill. Madrid. 1994 (2 ed.)

ECKL, S., ROBINSON,J. y THOMAS, D.: *Financial Engineering*. Basil Blackwell. Oxford. 1990

FERNANDEZ, Pablo: *Opciones y Valoración de Instrumentos Financieros*. Deusto. Bilbao. 1991

FERNANDEZ, Pablo: "Valoración y ejercicio anticipado de la put americana". *Análisis Financiero*. nº 53. 1991. Págs: 66-70

GEMMILL, Gordon: *Options Pricing*. McGraw Hill. Londres. 1993

LAMOTHE, Prosper: *Opciones sobre Instrumentos Financieros*. McGraw Hill. Madrid. 1993

NATEMBERG, S.: *Option Volatility and Pricing Strategies*. Probus. Chicago. 1988