TEORÍA DEL RIESGO EN MERCADOS FINANCIEROS: UNA VISIÓN TEÓRICA[1]

Rafael Sarmiento Lotero[2]
Rodrigo Vélez Molano[3]

RESUMEN

Para poder entender el significado de riesgo en las finanzas es necesario primero tratar de hallar el significado dentro de un marco teórico y después tratar de precisar en general de todo el documento que relación hay entre las finanzas y la economía. La economía trabaja sobre un modelo de mercado en el cual existe un conjunto de precios que igualan la oferta y la demanda, que se componen de factores tecnológicos (oferta), preferencias y expectativas (demanda). Las finanzas cuentan con una gran cantidad de datos que les permite comprobar cualquier supuesto sobre sus modelos, modelos que se basan mayormente en supuestos de racionalidad del individuo y mercados competitivos.

En general para la economía, los modelos parten de supuestos para lograr un comportamiento ideal de los individuos que a su vez les permitan hallar el equilibrio. Dentro de la economía se encuentran dos áreas de trabajo: la macroeconomía y la microeconomía, la primera estudia los problemas relacionados con tasas de interés, tasas de cambio, exportaciones e importaciones, cuentas nacionales, entre otras; la microeconomía se centra en el problema de maximización tanto del consumidor como en la del productor, además de su interacción en el mercado y como alcanzar el equilibrio. Sobre esta ultima (la micro), es donde las finanzas se encuentran con la economía ya que comparten

ABSTRACT

In order to understand the meaning of risk in finance is necessary to first try to find the meaning within a theoretical framework and then try to explain in general throughout the document that the relationship between finance and the economy. The economy works on a market model in which there is a set of prices that match supply and demand, which is composed of technological factors (supply), preferences and expectations (demand). The finances have a large amount of data that allows them to check any assumption on their models, models that are based largely on assumptions of rationality of the individual and competitive markets.

Overall on the economy, the models are based on assumptions to achieve an ideal behavior of individuals which in turn will enable them to find the balance. Within the economy are two work areas: macroeconomics and microeconomics, the first explores the problems associated with interest rates, exchange rates, exports and imports, national accounts, among others; microeconomics focuses on the problem of maximization of both consumers and the producer, in addition to their interaction in the market and how to reach a balance. On this last (micro), is where finances are with the economy and that share a common concept in the absence of arbitration. Based on this concept based micro finance and the financial economy emerges, which proposes a model for finan-

1 Trabajo de investigación realizado para la Universidad El Bosque. Escrito entregado el 16-04-2007 y aprobado el 14-06-2007
2 Rafael Sarmiento Lotero. Economista, Magíster Economía Univ. Andes, Magíster economía Univ. Zurich Suiza, Especialista Finanzas Univ. Javeriana, Magíster Economía Univ. Louvaine la Neuve Belgique, Magíster Economía Financiera Univ. Lyon 2 France, Doctor economía Univ. Louvaine Neuve, Belgique, PostDoctor Univ Lyon 2 y Univ. Geneve Suiza. Profesor investigador, Univ Javeriana, facultad de economía y Magíster Economía., Teoría del Portafolio Univ Javeriana, Prof. de Riesgo y Concesiones Univ. Externado, Prof. Riesgo Univ. Militar, Prof. Riesgo y Portafolios Unv. del Bosque. rsarmientolotero@javeriana.edu.co, rsarmientolotero@gmail.com
3 Rodrigo Velez Molano. Economista, Univ. Javeriana, Magíster Economía Univ. Javeriana, Profesor asistente en Economía Univ. Javeriana y Univ. Militar. En Teoría de Portafolios. rodrigovelez84@yahoo.com

un concepto en común, la ausencia de arbitraje. A partir de este concepto las finanzas se micro fundamentan y surge la economía financiera, en la cual se propone un modelo para los mercados financieros cuya demanda es perfectamente elástica, porque el mercado se compone de activos que son sustitutos uno del otro, y la oferta perfectamente elástica o inelástica dependiendo del modelo. Además de estudiar la aversión al riesgo de los individuos, el consumo y la inversión dentro de un marco de selección de activos riesgosos.

PALABRAS CLAVES
Riesgo en financiero, modelo de mercado, economía financiera, arbitraje, aversión al riesgo, activos riesgosos

cial markets where demand is perfectly elastic, because the market consists of assets that are substitutes each other, and supply perfectly elastic or inelastic depending on the model. In addition to studying the risk aversion of individuals, consumption and investment within a selection of risky assets.

KEY WPORDS
Risk in finance, market model, financial economy, arbitration, risk aversion, risky assets.

INTRODUCCION

Para poder entender el significado de riesgo en las finanzas es necesario primero tratar de hallar el significado dentro de un marco teórico y después tratar de precisar en general de todo el documento que relación hay entre las finanzas y la economía. La economía trabaja sobre un modelo de mercado en el cual existe un conjunto de precios que igualan la oferta y la demanda, que se componen de factores tecnológicos (oferta), preferencias y expectativas (demanda). Las finanzas cuentan con una gran cantidad de datos que les permite comprobar cualquier supuesto sobre sus modelos, modelos que se basan mayormente en supuestos de racionalidad del individuo y mercados competitivos.

En general para la economía, los modelos parten de supuestos para lograr un comportamiento ideal de los individuos que a su vez les permitan hallar el equilibrio. Dentro de la economía se encuentran dos áreas de trabajo: la macroeconomía y la microeconomía, la primera estudia los problemas relacionados con tasas de interés, tasas de cambio, exportaciones e importaciones, cuentas nacionales, entre otras; la microeconomía se centra en el problema de maximización tanto del consumidor como en la del productor, además de su interacción en el mercado y como alcanzar el equilibrio. Sobre esta ultima (la micro), es donde las finanzas se encuentran con la economía ya que comparten un concepto en común, la ausencia de arbitraje[4]. A partir de este concepto las finanzas se micro fundamentan y surge la economía financiera, en la cual se propone un modelo para los mercados financieros cuya demanda es perfectamente elástica, porque el mercado se compone de activos que son sustitutos uno del otro, y la oferta perfectamente elástica o inelástica dependiendo del modelo. Además de estudiar la aversión al riesgo de los individuos, el consumo y la inversión dentro de un marco de selección de activos riesgosos.

Para efectos de análisis existen dos caminos, el primero es considerar una economía con certidumbre y la segunda con incertidumbre. Una economía con certidumbre es aquella en donde los individuos conocen con seguridad el valor de las variables que se están evaluando, en otras palabras, toda la información disponible hoy es suficiente y necesaria para deducir el comportamiento de la economía en el futuro. En cambio, cuando este argumento ya no se aplica se dice que existe incertidumbre.

En función de describir de manera más explicita este hecho, el concepto de incertidumbre tomado del trabajo del profesor Frank Knight[5]

4 La ausencia de arbitraje para ambas áreas se refiere a que ningún individuo puede obtener una mayor utilidad o tasa de ganancia sin violar su restricción presupuestal, dentro de una economía neoclásica.
5 Risk, Uncertainty and Profit (1921).

ayuda a la explicación. Para Knight, cuando se presenta una situación en la cual existe, se conoce y se puede calcular probabilidades sobre un evento bajo una distribución de probabilidad (probabilidad objetiva), se presenta lo que se denomina riesgo; en cambio cuando no se puede calcular las probabilidades numéricas existe incertidumbre. Sin embargo para ambos casos Knight, concluyo que el individuo siempre tendrá unas probabilidades subjetivas o personales, que están en función de sus expectativas racionales. Por lo tanto el problema de una economía en incertidumbre será el conocer la distribución de probabilidades de un hecho para que la incertidumbre se le convierta en riesgo.

He aquí el problema principal, la economía financiera y la teoría del portafolio pretenden - entre otras cosas- ayudar al individuo a tomar la mejor decisión cuando se presenta la incertidumbre, no cuando esta ya se haya resuelto. Para ello hay dos opciones. La primera, supone que las probabilidades subjetivas de cada individuo están bien formadas y son correctas, y la segunda, intenta deducir la distribución de probabilidad para un evento. Si se toma la primera opción, el modelo tiene que especificar como se construyeron las probabilidades -por lo general es por el método Bayesiano- tomando en cuenta las expectativas de los individuos, sin embargo aunque todos los individuos tengan expectativas racionales no implica que estas tienen que ser iguales, causa de esto es la asimetría de información.

La segunda opción nos lleva a suponer una distribución de probabilidades que se pueda generalizar para todos los modelos, por lo general esta es la distribución normal. Resultado de varios trabajos empíricos en los cuales se hacen histogramas sobre las series de tiempo para lograr determinar la forma de la distribución de probabilidad[6].

Como se expuso, lo fundamental hoy en la teoría de las finanzas es trabajar con incertidumbre y riesgo. Para mirar con más detalle este tema, se introducirá a Daniel Bernoulli (1734) quien fue el que desarrollo el concepto de utilidad esperada y posteriormente veremos la formalización que hicieron los profesores J. Von Neuman y O. Morgensten (1944) de los axiomas y la existencia de la función de utilidad esperada y caracterizaciones de los juegos de lotería. Además de la medida de la aversión al riesgo por Arrow y Pratt, activos contingentes Arrow-Debreu y el modelo alternativo desarrollado por Jack Hirshleifer, modelo en el cual el agente representativo es un consumidor y un inversionista al mismo tiempo. Sin embargo, se espera que en una segunda entrega se pueda hacer la presentación de la teoría de portafolio Markowitz (1954) y del trabajo de Louis Bachellier (1900) sobre el comportamiento de los precios de activos financieros; estos dos últimos temas son los que predicen a los modelo CAPM, APT y CAPM continuo, siendo este ultimo tema el desarrollado por el Profesor Robert Merton que le permitió obtener en parte el premio Novel de Economía.

TEORIA DEL RIESGO Y LA INCERTIDUMBRE

En el desarrollo de la teoría económica se ha observado el papel fundamental que cumplen la oferta y la demanda como instrumentos versátiles del análisis económico. Sin embargo, en la realidad se sabe que la vida económica involucra asumir riesgos y enfrentarse a situaciones desconocidas que se resumen con la idea de incertidumbre. Dado que la demanda puede fluctuar de un mes a otro; los precios del trabajo, la tierra, las maquinas y los combustibles suelen ser bastante variables; y como consecuencia el comportamiento de los competidores también se verá modificado. En algunas actividades, como la agricultura, el petróleo y el gas, los individuos realizan inversiones hoy y producen en el futuro, haciendo que sus beneficios dependan de la evolución de los precios y en consecuencia se verán expuestos a sufrir pérdidas aleatorias como resultado del riesgo que involucra la vida del individuo.

Ante esta situación la teoría económica moderna se ve en la necesidad de incorporar la incertidumbre en el análisis de la conducta de las empresas y las economías domésticas. Algunos de estos componentes estudian por ejemplo el papel de los mercados en la difusión de los riesgos en tiempo y espacio, la teoría de juegos, la especulación y el arbitraje, llegando así a interesarse por un objetivo común como es "la conducta de los individuos en condiciones de incertidumbre".

6 Como se verá más adelante en el documento, el supuesto de la distribución normal no es del todo acertado.

Para comprender tal comportamiento económico se hace necesario definir primero lo que se considera "bajo incertidumbre" (under uncertainity), entendiéndose de manera práctica como una "inexactitud en lo conocido" (lack of certainity) donde por ejemplo un individuo no conoce con certeza las consecuencias de sus acciones. De esta manera, el resultado de cualquier elección que haga el individuo depende no solamente de la elección en sí sino también del "estado del mundo"[7] que este aconteciendo[8].

Tales inexactitudes pueden diferenciarse en dos tipos: la primera ocurre cuando el individuo se siente capaz de asignar algún tipo de probabilidad a los posibles "estados del mundo"; mientras que en la segunda el individuo se siente incapaz de hacer tal asignación. De aquí surge la principal diferencia entre riesgo e incertidumbre respectivamente, pero esta teoría será desarrollada más adelante en base al trabajo del economista Frank H. Knight.

La teoría económica permite relacionar estos dos conceptos de manera que el significado del término "riesgo" pueda interpretarse como "el peligro de perdida al cual se enfrenta el capitalista ante la incertidumbre sobre el porvenir de la actividad económica en la que invierte". De esta definición se deduce que tal peligro es asociado como la justificación moral para la obtención de beneficios en el caso en que la actividad tenga éxito. Mientras que en caso de pérdida se supone que el individuo incurre en una reducción involuntaria en su capacidad de satisfacción o de bienestar, justificada por la existencia de incertidumbre acerca del futuro de su inversión.

En este orden de ideas, para el estudio óptimo del comportamiento de las "organizaciones económicas" se debe observar como se enfrentan los individuos al contexto intertemporal para la toma de sus decisiones de inversión, la asignación de sus recursos y en general su desempeño en un entorno incierto.

Así pues las organizaciones económicas pueden ser diferenciadas en dos grupos constituidos por: las empresas, que poseen como activos los medios físicos de producción para la economía y a su vez emiten activos financieros para financiar sus actividades de producción; y por los intermediarios financieros, que son poseedores y emisores de activos financieros, invirtiendo entonces de manera indirecta en activos físicos o reales.

Dentro de los activos financieros para invertir se tienen las acciones, los bonos de diferentes vencimientos, las opciones y los futuros, entre otros. De igual manera los intermediarios financieros más nombrados son los bancos, los fondos mutuos y las compañías de seguros, quienes captan los ahorros de las familias y las empresas y los reinvierten en otros activos financieros. Los mercados donde individuos e intermediaros intercambian dichos activos financieros reciben el genérico nombre de "mercado de capitales".

Debido a la variedad de activos financieros existentes no se puede considerar una única tasa de interés o de retorno para todos por igual, sino que se observa todo un conjunto de retornos sobre cada uno de los diferentes activos. Entonces dada esta diversidad de activos se supone que los agentes económicos buscaran reducir el nivel de "riesgo" que abordan en la administración de su riqueza, mediante las diferentes estrategias de inversión que dependen de la resolución de tal incertidumbre.

Los psicólogos han estudiado extensamente esta "conducta encaminada a evitar el riesgo", donde inevitablemente centran su atención en la ansiedad que suscita la incertidumbre en los individuos. Por su parte los economistas se refieren a este comportamiento como la conducta de aversión al riesgo de los agentes, afirmando que los individuos normalmente son renuentes a correr riesgos aunque no desconocen su papel clave en el desarrollo y crecimiento de cualquier economía.

La medición de los diferentes niveles de riesgo se ha considerado como un aspecto critico en la toma de decisiones para diferentes disciplinas por muchos años, tanto así que en el área financiera los inversionistas asumen que la toma de decisiones sobre sus posibles alternativas financieras esta asociada con el intercambio intuitivo entre retorno-medio y riesgo. De acuerdo con esto la decisión a tomar

7 La frase "estado del mundo" vincula lo que el individuo no puede controlar y lo que el individuo desconoce acerca de un futuro estado del mundo.

8 Hey, John Denis; Uncertainty in Microecoeconomics; New York, New York University Press. 1979.

dependerá de la técnica que se utilice para medir el nivel de riesgo y las alternativas disponibles para realizar coberturas del mismo.

Algunos antecedentes acerca de la literatura en teoría de riesgo mencionan los primeros estudios serios de nociones de probabilidad que fueron desarrollados en el siglo XVI en la época del Renacimiento. En esta etapa, la ciencia y la tecnología avanzaron a un ritmo mucho mayor que en los siglos pertenecientes a la Edad Media.

Girolamo Cardano (1500 - 1571), fue un médico prestigiado aficionado a los juegos de azar (dados, cartas y ajedrez). A través del análisis de este tipo de juegos realizó múltiples análisis de probabilidad. En el libro "Liber de Ludo Aleae" (Libro de juegos de azar) publicado en 1663 después de que Cardano murió, se propuso el término "probable" que se refiere a eventos cuyo resultado es incierto y a través de este libro, Cardano fue la primera persona que cuantificó el riesgo mediante la medida de probabilidad.

La palabra latina probare significa probar o aprobar y Cardano fue la primer persona que introdujo el concepto de probabilidad. Este término ha evolucionado con el tiempo. El concepto de probabilidad que Cardano desarrolló se refiere al grado de credibilidad o aprobación de una opinión. Sin embargo, una idea más reciente del término probabilidad está asociada con resultados futuros que involucran incertidumbre. Este último concepto fue desarrollado cuando pudo medirse cuantitativamente la probabilidad con la frecuencia relativa de eventos pasados.

Otro italiano que analizó y escribió respecto de la teoría de probabilidad fue Galileo (1564 - 1642). El escrito mas conocido relacionado con dicha teoría se tituló "Sopra gli Scopertie dei Dadi" (Sobre los descubrimientos de los Dados). En él, como en la obra de Cardano, Galileo analiza la frecuencia de diferentes combinaciones y posibles resultados al tirar los dados.

A continuación se mencionan a Blas Pascal, Pierre de Fermat y a Chevalier de Mére, quienes propusieron un método sistemático para medir la probabilidad. Los tres fueron franceses académicos pertenecientes al siglo XVII. Fermat utilizó conceptos algebraicos, Chevalier fue intuitivo y filósofo, Pascal aplicó conceptos geométricos a la teoría de probabilidad (mediante el triángulo de Pascal es posible analizar las probabilidades de un evento).

Los avances en álgebra y en cálculo diferencial e integral que se dieron en los siglos XVII y XVIII propiciaron múltiples aplicaciones en teoría de probabilidad, desde la medición de riesgos en seguros e inversiones, hasta temas relacionados con medicina, física y pronóstico de las condiciones del tiempo.

En el año de 1730, Abraham de Moivre propuso la estructura de la distribución de probabilidad normal (conocida como distribución de campana) y propuso el concepto de desviación estándar.

En la misma época Daniel Bernoulli venia trabajando en la definición de un proceso sistemático para la toma de decisiones, basado en probabilidades, situación que dio lugar a lo que hoy se conoce como teoría de juegos e investigación de operaciones.

Por tal motivo la literatura de riesgo hace especial énfasis en la obra "Exposición de una Nueva Teoría en la Medición del Riesgo" publicada por Bernoulli hacia el año de 1730. Esta nueva teoría se fundamenta en el concepto de valor esperado para lo cual se define que: "*El Valor Esperado se obtiene al multiplicar cada posible ganancia por el numero de posibilidades en que estas pueden ocurrir, y luego se divide a la suma de estos productos por el numero total de casos posibles donde, en esta teoría, la consideración de casos donde todos son de la misma probabilidad se insiste mas adelante*"[9]. Una vez identificada esta regla, según Bernoulli, se debe proceder a enumerar las diferentes alternativas que surgen de ella, examinar ciertas inconsistencias y finalmente proponer algunas clasificaciones para la teoría del riesgo.

Sin embargo para un adecuado desarrollo del proceso se debe suponer que: "*siempre y cuando no haya razón para asumir que dos personas se enfrenten a riesgos idénticos, ambos deben poder esperar satisfacer sus deseos, y los riesgos que cada uno anticipe deben ser considerados en valores proporcionales*"[10]. El

9 Definición tomada de Bernoulli, Daniel, "Exposition of a new theory on the measurement of risk" (translation from the 1730 version). Econometrica 22:23-36.

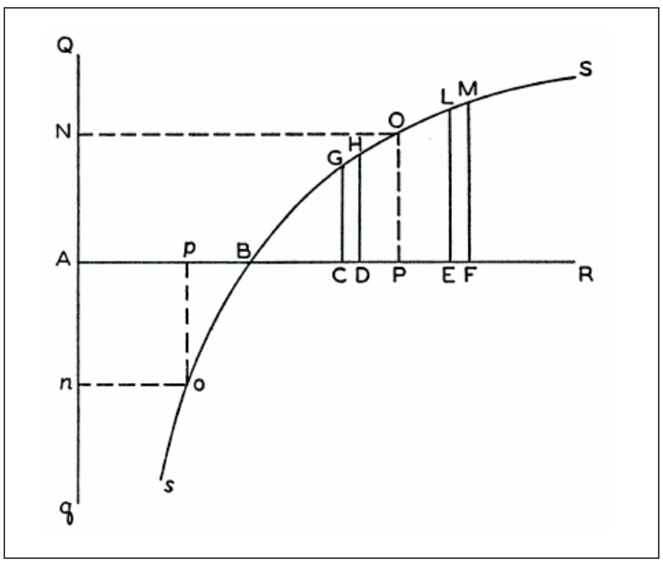
10 Bernoulli, Daniel, "Exposition of a new theory on the measurement of risk" (translation from the 1730 version). Econometrica 22:23-36.

significado de este valor no se basa en las características de las personas ni en la toma de un precio determinado, sino en la utilidad que representa para el agente.

Por lo tanto una medición valida del riesgo no puede realizarse sin considerarse el papel de la utilidad en el individuo, ya sea para asociar la utilidad de cualquier ganancia o bien para determinar que tanto rendimiento se requiere para obtener la *utilidad* establecida. De acuerdo con Bernoulli se deben hacer ciertas generalizaciones para evitar que las circunstancias del individuo puedan influir en el ítem de utilidad, algunas de estas son:

- Si la utilidad de cada posible beneficio esperado es multiplicada por el número de posibilidades en que estas pueden ocurrir, y luego se divide la suma de estos productos por el número total de posibles casos se obtiene la "utilidad media" (*moral expectation*) y el rendimiento que corresponde a tal utilidad será equivalente al valor del riesgo en cuestión.
- Se asume como probable que cualquier incremento en el nivel de riqueza, sin importar lo insignificante que sea se traducirá siempre en un incremento en la utilidad, pero esta será entonces inversamente proporcional a la cuantificación de los bienes que se posean previamente[11].

De esta forma, Bernoulli procede a establecer el caso general para un individuo y su curva de utilidad. Mediante la siguiente grafica se define que para un individuo sea **AB** la cuantificación de los bienes que se poseen inicialmente, entonces:



Sea la curva **BGLS**, constituida por las coordenadas **CG, DH, EL, FM**, etc., que designan las utilidades correspondientes a las abscisas **BC, BD, BE, BF**, etc., que señalan a su vez las ganancias en el nivel de riqueza.

También sea **m, n, p, q**, etc., las variables que indican el número de posibilidades en que **BC, BD, BE, BF,** etc., pueden ocurrir.

Entonces de acuerdo a la definición de moral expectation se tiene que para este individuo la utilidad media se representa:

$$PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM + ...}{m + n + p + q + ...}$$

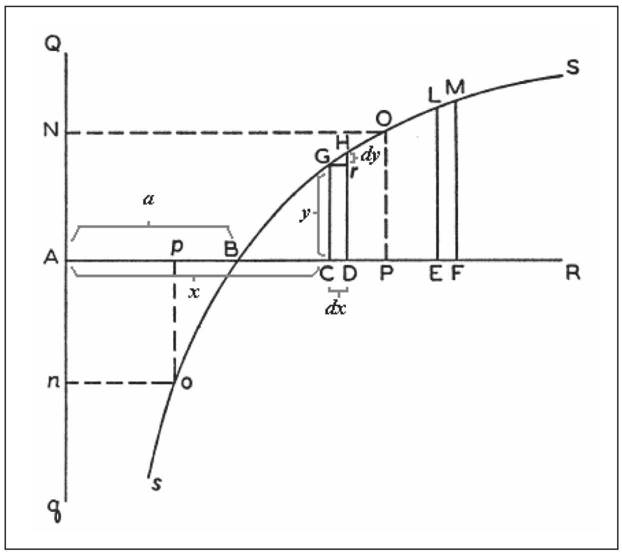
Si ocurre **AN = PO**, entonces **NO - AB** representará la ganancia propiamente esperada o el valor del riesgo en cuestión que en este caso será **BP**.

Por otra parte, para determinar que tanto de sus bienes (AB) debe invertir un individuo, que

11 Respecto a esta "cuantificación" el autor se refiere a los bienes que puedan contribuir a satisfacer cualquier tipo de necesidad, en este sentido no se puede decir que alguna persona no posea nada a menos que se este muriendo de hambre.

este interesado en dicha propuesta de valor, se debe examinar la curva de utilidad en dirección opuesta tal que la abscisa **Bp** representa ahora una perdida y la coordenada po representa su correspondiente disminución en utilidad. Si se supone un "juego justo"[12] donde la reducción de utilidad a la que se esta expuesto, en caso de perdida, sea proporcional a la utilidad obtenida para el evento en que se gane, se dice que **An** = **AN**, o **po** = **PO**. Esto quiere decir que Bp permitirá visualizar que parte de la riqueza que se tiene disponible para invertir, equivaldría a utilizar para obtener el nivel de utilidad media **PO**, por lo tanto se ha establecido un limite máximo para inversión del total inicial **AB**.

Una vez planteado el problema de manera general, Bernoulli supone examinar el caso en que la cuantificación de **AB** sea infinitamente grande, incluso en proporción a la mayor ganancia posible **BF**, con lo cual el arco **BM** se considera una línea infinitesimalmente pequeña y delgada.



En el grafico se supone que las ganancias **BC** y **BD** son cercanamente iguales y su diferencia **CD** se convierte en una medida infinitesimalmente pequeña.

En este caso se define la línea **Gr** paralela a **BR**. Así **rH** representará la ganancia infinitesimalmente pequeña en términos de "utilidad" para un individuo cuya fortuna es **AC** y obtiene la ganancia **CD**.

Entendido lo anterior se define **AC = x, CD = dx, CG = y, rH = dy, AB = ?** y sea **b** una constante con lo cual se tiene que *dy = b*(dx/x)* o *y = b** log*(x/a)*. Por tanto la curva **sBS** será una curva logarítmica y su asíntota[13] será **Qq**.

Ahora bien, para obtener la utilidad media (**PO**) se deben reescribir sus componentes de manera tal que constituyan la siguiente ecuación:

$$b\log\frac{AP}{AB}=\frac{\left(mb\log\frac{AC}{AB}+nb\log\frac{AD}{AB}+pb\log\frac{AE}{AB}+qb\log\frac{AF}{AB}+...\right)}{(m+n+p+q+...)}$$

Encontrando que:

$$AP=(AC^{m}..AD^{n}..AE^{p}..AF^{q}...)^{\frac{1}{m+n+p+q+...}}$$

Finalmente se tiene que al resultado de la operación **AP** se le resta la cuantificación **AB** y así el remanente **BP** será considerado entonces como el valor del riesgo de la proposición en cuestión.

12 La idea de "juego justo" se basa en suponer que hay igual oportunidad de ocurrencia para cada retorno del juego.

13 En geometría, la asíntota, equivale a una línea recta que, prolongada indefinidamente, se acerca progresivamente a una curva sin llegar nunca a encontrarla.

En conclusión se tiene que para la teoría del riesgo, los descubrimientos de Bernoulli son todavía paradigmas en el comportamiento racional de un inversionista. De esta manera se expuso la idea que el grado de satisfacción que resulta de un aumento en la riqueza de una persona, es inversamente proporcional a la cantidad de bienes con que esa persona cuenta, explicando con esto porqué el ser humano se considera adverso al riesgo.

Según la historia, cien años después de la notable contribución de Pascal y Fermat, el inglés Thomas Bayes es quien aporta una nueva teoría de probabilidad, demostrando cómo tomar mejores decisiones incorporando nueva información a la información anterior. Para 1875, Francis Galton introdujo el concepto de "regresión a la media", en el cual a pesar de las fluctuaciones en los precios de los mercados organizados y que las cotizaciones de los activos en dichos mercados pueden estar sobrevaluadas o subvaluados, siempre habrá una fuerza natural que presione los precios a su justo valor o a la "restauración de la normalidad". Con esto el concepto de probabilidad estático se ve transformado en un concepto dinámico.

A comienzos del siglo XX los aspectos económicos del proceso de toma de decisiones en situación de riesgos e incertidumbre empiezan activamente a discutirse después del año 1921 cuando se publica el libro clásico del economista norteamericano Frank H. Knight titulado "Riesgo, Incertidumbre y Beneficio". En la publicación se comenta que a pesar de utilizarse comúnmente los términos Riesgo e Incertidumbre como palabras similares estos son dos términos diferentes.

Lejos de ser sinónimos -o casi- como ocurre en la vida cotidiana cuando alguien se refiere a ellos, en la Ciencia Económica el Riesgo y la Incertidumbre son dos términos muy diferentes y diferenciarlos es uno de los principios básicos de la Economía.

Kinght -profesor de la Universidad de Chicago- reconoce la "falta de certezas" en una y otra situación, pero sostiene que mientras en un caso es posible establecer mediciones en el otro no. Para lo cual se define que:

- Riesgo: Se esta en una situación de riesgo si el azar al que se enfrenta una determinada unidad productiva o una decisión puede ser medido en términos probabilísticos (aleatoriedad con probabilidades conocidas) se está ante una situación de este tipo.
- Incertidumbre: Se está atravesando una situación de incertidumbre cuando es imposible realizar tales estimaciones, dado que se trata de una aleatoriedad con probabilidades desconocidas.

Mientras el riesgo ofrece a un inversor la posibilidad de elegir de acuerdo con las expectativas y probabilidades de éxito (y tras un análisis de variables medibles), para el caso de incertidumbre tales parámetros no existen.

Las diferencias entre una y otra situación no tienen relación con las causas que provocan una u otra. En todos los casos puede tratarse de causas exógenas (por ejemplo el clima), endógenas (producidas por otros agentes económicos) o de política (medidas impositivas sobre ciertas industrias por ejemplo).

La distinción entre el Riesgo y la Incertidumbre y la "posibilidad" o "imposibilidad" de medición de una y otra, respectivamente, es vital en la determinación de los beneficios empresariales. Ya que según explica Knight, el riesgo no genera beneficios (extraordinarios), mientras que la incertidumbre sí lo permite (la curva de costos incluye los beneficios ordinarios, que son aquellos que no inducen a ningún productor a ingresar a un sector).

Por ejemplo si se espera que 1 de cada 10 deudores no pague, todos los competidores aumentarán el precio de venta 10%, pero ello no aumentará la tasa de ganancia. En cambio, una exitosa inversión realizada bajo condiciones de incertidumbre sí genera beneficios extraordinarios, que son -precisamente- la remuneración por haberse atrevido a operar en condiciones de incertidumbre, y con éxito, aunque la ventaja del riesgo se basa en su tratamiento más concreto, basado en la distribución de probabilidades de las variables.

En el prefacio a su obra 'Risk, Uncertainty and Profit' indicaba Knight sus intenciones críticas y su deseo de valorar el sistema de empresa libre que es un factor para asegurar y dirigir el esfuerzo de cooperación en el grupo social. El papel del empresariado es ahí definido como el "factor básico" en esa coordinación dentro del sistema económico.

La teoría de beneficio de Knight es una variación del mismo análisis general producido anteriormente por las teorías de John Bates Clark y Joseph A. Schumpeter, donde los autores buscaban establecer condiciones definitivas para el equilibrio general en competencia perfecta, aunque para Knight esto era el "mercado perfecto" dado que él mantiene la idea de competencia o la rivalidad como un ideal inconsistente con la conducta económica.

Complementando las ideas de Schumpeter sobre la función innovadora del empresario en su teoría del beneficio, Knight supone al empresario como receptor del beneficio puro, es decir, el ingreso residual después de haber descontado todos los pagos contractuales como recompensa por asumir la incertidumbre. Estableciendo al empresario como el capitalista que busca su beneficio en un mercado dinámico, y que no teme asumir riesgos al aceptar la incertidumbre de ese mercado en constante cambio y así da también seguridad a los otros propietarios de recursos (entre ellos, al trabajador).

Según Knight, la incertidumbre proviene ante todo del hecho de que los procesos productivos precisan tiempo. Entonces se deben tomar decisiones sobre los inputs ahora, para obtener outputs en el futuro. Mientras que el caso del consumidor, en general, se basa en que este no contrata sus bienes por anticipado ya que no sabe lo que quiere, cuánto, y con qué inconvenientes lo obtendrá, lo cual deja al productor la tarea de crear bienes y ponérselos a su disposición cuando llegue el momento. Tal paradoja se basa en la "ley de los grandes números"[14] para la consolidación del riesgo (o de la incertidumbre) y así se obtiene un rasgo más fundamental del sistema económico, en la producción para un mercado.

A cambio de este riesgo asumido ante la incertidumbre, el empresario capitalista impone su propio juicio al de los otros y decide (Toma de Decisiones) sobre el plan de producción del grupo de los que poseen los recursos necesarios para la producción y, justificadamente, puede reclamar los beneficios residuales.

La principal cualidad para tomar estas decisiones es la "previsión". Con libre competencia los individuos con mayores capacidades de previsión son los que se especializan en la toma de estas decisiones. Así es como Knight distingue el rol del empresario, que toma las últimas decisiones, y afronta la última incertidumbre, del rol del manager que sólo decidiría sobre asuntos cotidianos en dependencia del propietario.

Para reducir la incertidumbre económica, Knight utiliza el mecanismo de la "consolidación". Entendiendo que la consolidación es a la incertidumbre lo que el seguro es al riesgo: un método de reducción de la incertidumbre mediante la creación de un fondo de recursos comunes. De igual manera se acepta la posibilidad de reducir riesgos mediante la diversificación de la cartera de pedidos (el "portafolio"), denominándola entonces "difusión" del riesgo, aunque no con tanta importancia como con la creación de tales fondos comunes (por ejemplo la constitución de una gran firma o holding).

Sin embargo Knight considera vital que las empresas aprovechen las ventajas de su dimensión para poder seleccionar los mejores managers y así las decisiones más cruciales serían pues las referentes a la selección de sus responsables[15].

De acuerdo con lo anterior, Knight expone que el beneficio empresarial logrado no es sino el residuo de la diferencia entre los ingresos conseguidos en el mercado y el consumo de factores necesario para la producción de bienes. Pero el beneficio no sólo compensa por haber asumido riesgos, sino es también el resultado de la diferencia (derivada de la inseguridad) entre el valor esperado y el valor real de los productos colocados en el mercado. Con esta idea, Knight introduce un nuevo elemento en la consideración del papel del empresario donde los beneficios que puede obtener éste no sólo dependen de sus propias capacidades, sino también de la medida general en que en el entorno de mercado se desarrollan iniciativas, capacidades y formas de conducta.

---

14 Se considera la "ley de los grandes números" como el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad. Básicamente el teorema establece que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, que es precisamente la probabilidad, cuando el experimento se realiza muchas veces.

15 En este punto no se discute el tema del posible 'oportunismo' de los managers que podrían defraudar al propietario, basándose en la posible supervisión de sus actividades. Y el mayor riesgo moral se daría en el director que selecciona sus ejecutivos pero es muy difícil asegurarse ante las consecuencias de estas decisiones.

De esta manera la idea principal de este primer estudio acerca del riesgo e incertidumbre económicos es que ser empresario significa estar dispuesto a correr peligros, siendo imposible obtener ganancias sin enfrentarse a los diferentes riesgos del ambiente económico, resumiendo lo anterior en la premisa "Si no hay nada que perder, no hay nada que ganar". Haciendo que el beneficio empresarial surja de la diferencia entre las previsiones y lo que realmente ocurre.

Como se ha visto, se han involucrado conceptos de nivel de riqueza de los individuos con ideas de ganancia, pérdida y rendimiento esperado, haciendo inevitable considerar los diferentes peligros y posibilidades de beneficio que llevan al individuo a *asumir* una posición, un punto de vista, frente a determinados niveles de riesgo para los que su motivación no solamente se medirá por la existencia de utilidad sino también por la preocupación de obtener la *maximización de la misma*.

Entre los padres de la teoría de selección en situación de riesgo e incertidumbre están también los economistas Milton Friedman y Joseph Stiglitz, quienes han estudiado el comportamiento del hombre tomando decisiones racionales en situación de una información completa.

De igual manera para el estudio del comportamiento de los individuos bajo el contexto de incertidumbre y sus implicaciones en la toma de decisiones respecto al consumo, la inversión y en general la valoración de los contratos financieros en los que se interesan, ha prevalecido la teoría de "Hipótesis de la Utilidad Esperada" de Von Neuman y Morgenstern (V-N-M) desarrollada hacia 1947.

Bajo esta hipótesis cada decisión de consumo o inversión del individuo esta caracterizada por la determinación de un rango de posibles retornos para un activo, que a su vez son ponderados por su probabilidad de ocurrencia (por ejemplo en el caso de una lotería). El individuo considerado como un tomador de decisiones (decision-maker) actuará ya no solamente llevado por el parámetro de valor esperado sino que sus preferencias involucraran también la maximización de su utilidad esperada.

En el desarrollo básico de la teoría se retoma la idea de juego o apuesta justa, definida como aquella en la que hay igual oportunidad para que cada retorno pueda ocurrir. A partir de este concepto justo se busca representar de mejor manera las preferencias del individuo frente al simple cálculo del valor esperado, este último criticado por su deficiencia en determinar la cantidad de dinero que estaría dispuesto a pagar un individuo, como máximo, para enfrentarse a una lotería en particular[16].

UTILIDAD ESPERADA

El concepto de utilidad en términos generales consiste en una función que representa y da valor a un conjunto de bienes sobre los cuales un individuo tiene alguna preferencia. Tomando como punto de partida esta definición podemos introducir a Daniel Bernoulli, quien introdujo el concepto de utilidad esperada como herramienta de elección ante un problema de incertidumbre, y los profesores VonNeuman-Morgesten que generalizaron las propiedades para dichas funciones de utilidad esperada. La característica principal de este problema de elección, es que los bienes ya no son de consumo sino lo que se denomina loterías[17].

DANIEL BERNOULLI

Alrededor del año 1734 Daniel Bernoulli junto con su hermano Nicolás Bernoulli, plantearon el siguiente juego:

Hay dos personas A y B, A le propone a B que lance una moneda repetidamente hasta que salga sello. Si pasa que en el m-esimo lanzamiento sale cara la lotería pagará xm. Dado esto, se conoce que la probabilidad de ganancia es:

$$p_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

Para Nicolás Bernoulli el valor esperado del juego es:

$$E\left[X\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m x_m = \infty$$

16 La paradoja de San Petersburgo trabaja la debilidad del valor esperado del dinero como criterio para agregar nuestras preferencias acerca de las loterías. Este es un caso extremo en el que el valor esperado de una lotería sería infinito, lo cual supondría que nadie estaría dispuesto a pagar un monto tal para participar en ella y por lo tanto el valor real del juego es menor que su valor esperado.

17 Una lotería se define como una función que transforma un evento con una probabilidad de ocurrencia, en un pago.

Ahora supongamos que A le da a escoger a B entre jugar y un pago cualquiera, la pregunta que B le debería hacer a A es: ¿cual es el valor del pago?. A puede responder a esta pregunta si encuentra un valor para el cual B le sea indiferente entre jugar y el pago mismo[18], ya que le ofrecerá más o menos dependiendo de que quiera A que acepte B. Al ser infinito el valor esperado del juego, el individuo B nunca podrá recibir un equivalente para dejar de jugar y el individuo A nunca estará dispuesto a pagar una cantidad infinita.

Para Daniel Bernoulli, este problema puede tener una solución posible si en vez de utilizar el valor esperado del juego como herramienta de decisión se utiliza lo que él denomino el *valor moral del dinero*. Que en otras palabras, se refiere a la satisfacción que en este caso le de B a recibir un pago x_m, $u(x_m)$. Dado que para cada vez que el juego le pague xm B le asignará un valor $u(x_m)$, el valor moral esperado del juego será la sumatoria de la satisfacción moral que le produce el pago ($u(x_m)$) por la probabilidad de obtener esa satisfacción, que sería la misma de recibir el pago xm, matemáticamente:

$$U(\bullet)=\sum_{m=1}^{\infty}u(x_m)p_m=\sum_{m=1}^{\infty}u(x_m)\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

Por ejemplo para un $x_m=2^m$, esta utilidad esperada tiende a Ln(4), se ve como el resultado difiere del valor esperado que es infinito.

La paradoja de Sant-Petersburgo como es conocido este juego, es fundamental-actualmente el concepto del valor moral del dinero se le conoce como utilidad esperada- porque permitirá mas adelante diferenciar entre la utilidad del valor esperado del juego y la utilidad esperada, términos que más adelante se explicarán con más detenimiento. Otro aporte que se desprende de este ejercicio es, que la satisfacción de un individuo depende de la acumulación que tenga de dinero y que esta acumulación a su vez depende del resultado del juego, en otras palabras, la utilidad esperada esta en función de la riqueza y del valor esperado del juego, además es una función creciente, es decir, el individuo prefiere más a menos.

Como consecuencia del aporte de Daniel Bernoulli, los profesores VonNeuman-Morgensten, se dieron a la tarea de formalizar el concepto de la utilidad esperada en su libro titulado *The Theory of Games And Economic Behavior* (1944), aquí se presentan los axiomas.

J. VON NEUMAN-O. MORGENSTEN

Para los profesores VNM, el problema de la función de utilidad y más específicamente con el de la satisfacción que brinda consumir un bien, tiene relación con lo que pasa en la física con la sensación de calor o frío, la cual es totalmente subjetiva, ¿cuando se puede determinar objetivamente que una persona tiene frío o calor?. Para esto la física ideo una herramienta alterna o proxy, la temperatura. Con el nivel de temperatura podemos determinar de una más general cuando un individuo en condiciones normales podría tener frío o calor. De igual modo la función de utilidad puede servir como proxy para medir de manera objetiva un aspecto totalmente subjetivo como lo es la satisfacción que le produce unas canastas de bienes a un individuo. Sin embargo, para que esto se pueda hacer de una manera más acertada es necesario que las funciones de utilidad cumplan con lo siguiente.

Considerando un sistema de utilidades $U=(u,v,w), u>v$ para cualquier número $\alpha(0>\alpha>1)$ y una operación:

$$\alpha+(1-\alpha)v:\ w$$

Estos conceptos satisfacen los siguientes axiomas:

1) Si $u>v$ es un ordenamiento completo de U. Esto significa que escribir $u<v$ significa que $v>u$. Entonces:

El sistema de preferencias es completo sí para cualquier u, v una y solo una de las tres relaciones se mantiene:

$$u>v, u : v, u<v$$

Y cumplirán el principio de transitividad sí:

$$u>v, v>w \Rightarrow u>w$$

El axioma 1) nos dice que todo individuo racional es capaz de ordenar sus utilidades de la mayor a la menor.

18 A este concepto se le conoce como equivalente cierto, para el cual un individuo es indiferente entre jugar o recibir un pago cierto.

2) Ordenamiento y Combinación
Si $u<v$ implica que $u<\alpha u+(1-\alpha)v$, entonces hasta con una probabilidad de (1-α) v será preferido a u.

Si $u>v \Rightarrow u>\alpha u+(1+\alpha)v$, entonces hasta con una probabilidad de (1 - α) pasará que $u>v$.

Las preferencias son continuas si $u<w<v$ implica la existencia de α con $\alpha u + (1-\alpha)v<w$. Si w es preferible a u, e inclusive v es más preferido, entones la combinación de u con una probabilidad de (1-α) de v no afectará la preferencia por w si α es pequeño. Análogamente:

$$u>w>v \Rightarrow \alpha, \alpha u + (1-\alpha)v>w$$

En otras palabras un agente racional puede construir una canasta en base a la mayor y la menor utilidad dada una proporción que sea preferida a una canasta representada por la utilidad que cardinalmente se encuentre en el medio de las dos.

3) Combinación algebraica:
Cualquier combinación que el agente pueda hacer dado que es indiferente entre la combinación de las canastas representadas por dos utilidades, será a su vez indiferente con otra combinación en donde una parte de la canasta sea también una combinación de las canastas anteriores.

$$\alpha u+(1-\alpha)v : (1-\alpha)v+\alpha u$$
$$\alpha[\beta u+(1-\beta)v]+(1-\alpha)v : \gamma u+(1-\gamma)v$$
$$\gamma = \alpha\beta$$

Es irrelevante el orden de la combinación de u y v ya que son eventos alternativos.

Ya se mostró como las funciones de utilidad pueden ser de gran ayuda para volver un problema subjetivo uno objetivo. Ahora es necesario ampliar estos axiomas ya no a unas utilidades que representan una canasta de bienes sino que se verá el comportamiento de las preferencias dentro de un conjunto de loterías, que representarán en este caso la incertidumbre acerca del nivel de utilidad que se podrá obtener por parte de un agente racional.

LOTERIAS Y UTILIDAD ESPERADA
A continuación se define formalmente el concepto de lotería y se exponen los axiomas que deben seguir las preferencias sobre estas mismas, así como la representación de la utilidad esperada de la forma VNM.

Lotería se define como un juego que entrega unos pagos con cierta probabilidad de ocurrencia. Y se denota como la lotería L, que entregará un pago n con una probabilidad p_n.

Dado esto podemos expresar las preferencias sobre las loterías de igual manera que en el caso anterior.

a) Una lotería simple L es una lista $L = (p_1,......, p_n)$, que para cualquier n $\sum_n p_n = 1$, siendo p_n la probabilidad de que el pago n ocurra.

b) Dadas K loterías simples $L_k = (p^1{}_1,...., p^k{}_n)$, $k = 1,...,n$, y $\alpha_\kappa \geq 0 \sum_k \alpha_k = 1$, la lotería compuesta $(L_1,...,L_k; \alpha_1,...,\alpha_\kappa)$, será la alternativa riesgosa que ofrece la lotería simple L_k con probabilidad $\alpha_\kappa \forall k$.

La probabilidad de obtener el pago n en una lotería reducida L_k es:

$$p_n = \alpha_1 p_1^1 + ... + \alpha_1 p_n^k$$

c) La relación de preferencia $\succsim$ en el espacio de las loterías simples $\mathscr{L}$ es continua si para cualquier $L, L', L'' \in \mathscr{L}$, los conjuntos:

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1]$$
$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

Cambios pequeños en la probabilidad no deben cambiar el ordenamiento de las preferencias.

d) La relación de preferencia $\succsim$ en el espacio de las loterías simples $\mathscr{L}$, satisface el axioma de independencia si para toda $L, L', L'' \in \mathscr{L}$ con $\alpha \in [0,1]$, tenemos:

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

El combinar L y L' con L'', no cambia el ordenamiento de las preferencias sobre L y L'.

e) La función $U: \mathscr{L} \to$ i tiene una función de utilidad, si hay una asignación de números $(u_1,....,u_n)$ para los N pagos, tal que para cada lotería $L=(p1,....,pn) \in \mathscr{L}$, tenemos:

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_n p_n$$

Una función de utilidad $U: \mathscr{L} \to$ i tiene forma de utilidad esperada VonNeuman-Morgensten (VNM) sí y solo sí satisface:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k U\left(L_k\right)$$

Para cualquier K loterías, $L_k \in \mathcal{L}$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\geq 0, \sum_k \alpha_k = 1$[19]

Otra característica de las funciones de utilidad VNM, es que transformamos si linealmente una función VNM, esa transformación será una función VNM:

Suponga que $U:\mathcal{L}\rightarrow$i es VNM para $\succsim$ sobre $\mathcal{L}$. $\ddot{U}:\mathcal{L}\rightarrow$i, es otra VNM para $\succsim$ sí y solo sí hay un escalar $\beta>0$ y γ, tal que, $\ddot{U}(L)=\beta U(L)+\gamma$, para cada $L\in\mathcal{L}$.

Nótese que si $U(\bullet)$ es VNM con forma de utilidad esperada, entonces $\ddot{U}(L)=\beta U(L)+\gamma$:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right)=\beta U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right)+\gamma=\beta\sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(L_k)+\gamma=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\left[\beta U(L)+\gamma\right]$$

$$U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k \ddot{U}(L)$$

$\ddot{U}(L_k)$ tiene forma de utilidad esperada.

Como se mostró, las preferencias por las loterías satisfacen los axiomas de continuidad e independencia, se puede decir que las preferencias están representadas por una utilidad esperada, lo que permite hablar de un teorema de la utilidad esperada.

TEOREMA DE LA UTILIDAD ESPERADA

Suponga la relación de preferencias racionales $\succsim$ en el espacio de las loterías $\mathcal{L}$, satisface los axiomas de continuidad e independencia. Entonces $\mathcal{L}$ admite una representación de la utilidad como forma de utilidad esperada. Es decir, podemos asignar un número u_n a cada pago $n=1,\ldots,N$, de tal manera que para cualquier par de loterías $L=(p_1,\ldots,p_n)$, $L'=(p_1',\ldots,p_n')$, tenemos:

Para demostrar este teorema[20], supóngase que existe la peor lotería $\underline{L}$ y la mejor lotería $\overline{L}$, tal que $\overline{L}\succsim L\succsim \underline{L}, \forall L\in\mathcal{L}$. Entonces:

1) Sí $L>L'$ y $\alpha\in(0,1)\Rightarrow L>\alpha L+(1-\alpha)L'>L'$.

2) Sea $\alpha,\beta\in[0,1]\Rightarrow\beta\overline{L}+(1-\beta)\underline{L}>\alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L}\Leftrightarrow\beta>\alpha$.

3) Para cualquier $L\in$ existe un único número $\alpha_k/[\alpha_k\overline{L}+(1-\alpha_k)\underline{L}]:L$.

4) La función $U:\mathcal{L}\rightarrow$i que asigna $U(L)=\alpha_L, \forall L\in\mathcal{L}$, representa la relación de preferencia $\succsim$.

Teniendo estos cuatro puntos se quiere mostrar que para cualquier $L;L'\in$ y $\beta\in[0,1]$:

$$U\left[\beta L+(1-\beta)L'\right]=\beta U(L)+(1-\beta)U(L')$$

Por definición se tiene

$$L:\ U(L)\overline{L}+\left[1-U(L)\right]\underline{L}$$

$$L':\ U(L')\overline{L}+\left[1-U(L')\right]\underline{L}$$

Por lo tanto, por el axioma de independencia, aplicado dos veces

$$\beta L+(1-\beta)L':\ \beta\left[U(L)\overline{L}+(1-U(L))\underline{L}\right]+(1-\beta)\left[U(L')\overline{L}+(1-U(L'))\underline{L}\right]$$

Reagrupando términos

$$\beta L+(1-\beta)L':\ \left[\beta U(L)+(1-\beta)U(L')\right]\overline{L}+\left[1-\beta U(L)-(1-\beta)U(L')\right]\underline{L}$$

En otras palabras, la lotería compuesta que arroja la lotería $[U(L)\overline{L}+(1-U(L))\underline{L}]$con probabilidad β y la lotería $[U(L')\overline{L}+(1-U(L'))\underline{L}]$ con una probabilidad $(1-\beta)$, tiene la misma lotería reducida como la lotería compuesta que arroja $\overline{L}$ con probabilidad $[\beta U(L)+(1-\beta)U(L')]$ y $\underline{L}$ con probabilidad $[1-\beta U(L)-(1-\beta)U(L')]$.

Por la construcción de $U(\bullet)$ en el punto 4, se tiene:

$$U\left[\beta L+(1-\beta)L'\right]=\beta U(L)+(1-\beta)U(L')$$

Y con esto acaba la demostración.

Como conclusión de esta sección podemos decir que las preferencias del consumidor sobre un conjunto de loterías pueden ser fielmente representadas por una función de utilidad esperada, siempre y cuando cumplan con los axiomas de continuidad e independencia. Ahora teniendo en cuenta el ordenamiento de las preferencias de un individuo bajo incertidumbre se puede pasar a analizar si éste es amante, neutro o averso al riesgo, que dependerá de la forma de su utilidad esperada.

19 Demostración: $U(\bullet)$ tiene forma de utilidad esperada, y hay una lotería compuesta $(L_1,\ldots,L_k;\alpha_1,\ldots,\alpha_K)$, donde $L_k=(p^k_1,\ldots,p^k_n)$ y su lotería reducida sería $L'=\sum_k\alpha_k L_k$, entonces:

$$U\left(\sum_k\alpha_k L_k\right)=\sum_n u_n\left(\sum_k\alpha_k p_n^k\right)=\sum_k\alpha_k\left(\sum_n u_n p_n^k\right)$$

$$U\left(\sum_k\alpha_k L_k\right)=\sum_k\alpha_k U(L_k)$$

20 Demostración tomada del libro Microeconomics Theory de Mass-Colell (1995).

AVERSION AL RIESGO Y MEDICIÓN

El esfuerzo por saber que tipo de actitud toma el individuo frente al riesgo, se justifica en la medida en que, este conocimiento permita saber cual es la composición de la canasta de consumo sobre los activos riesgosos y la manera cómo la utilidad esperada se comporta en el margen cuando cambia la riqueza.

El concepto simple de aversión al riesgo es: la apatía que cualquier individuo puede tener hacia una situación de riesgo o incertidumbre. Para simplificar el análisis de esta sección se le dará el mismo significado al riesgo y a la incertidumbre, contrario a la distinción hecha anteriormente. El mejor escenario que representa este concepto son los juegos de lotería, y como complemento se tiene que medir la curvatura de la función de utilidad para saber si es cóncava (averso al riesgo), lineal (neutro riesgo) y convexa (amante al riesgo).

También es importante hacer claridad sobre dos conceptos:

La *Utilidad Esperada* es la utilidad del pago (de una lotería) por su probabilidad de ocurrencia.

La *Utilidad del Valor Esperado* es la utilidad que arroja el valor esperado de la lotería, en otras palabras la utilidad de la esperanza del juego.

Para hacer más claridad se dice que un individuo tiene:

- Una riqueza inicial w_0.
- Existe una lotería $\tilde{x}=L(x,-x;p,1-p)$. .
- La riqueza final será $\tilde{w}_f=w_0+\tilde{x}$.
- Una función de utilidad en función de la riqueza $u(w)$.

De lo anterior:

$$u\left(E\left[\tilde{w}_f\right]\right)=u\left(p\left(w_0+x\right)+\left(1-p\right)\left(w_0-x\right)\right)$$

$$E\left[u\left(\tilde{w}_f\right)\right]=pu\left(w_0+x\right)+\left(1-p\right)u\left(w_0-x\right)$$

A continuación toca determinar sí $u(E[\tilde{w}_f])$ (utilidad del valor esperado) es mayor, menor o igual que $E[u(\tilde{w}_f)]$ (utilidad esperada). Dependiendo de la relación se podrá decir si el individuo es amante, neutro o averso al riesgo.

Para el caso en que $u(E[\tilde{w}_f])>[u(\tilde{w}_f)]$, es decir, la utilidad del valor esperado es mayor que la utilidad esperada. Cuando el individuo valora más el resultado del juego que el juego mismo, le produce más placer el ganar que simplemente participar del riesgo de jugar lotería, es *averso al riesgo*.

Para el caso en que $u(E[\tilde{w}_f])<E[u(\tilde{w}_f)]$, la utilidad del valor esperado es menor que la utilidad esperada. El individuo participará más por las ganas de jugar que por el de obtener una ganancia, sin decir esto que no le importe perder. A este individuo se cataloga como *amante al riesgo*.

Cuando $u(E[\tilde{w}_f])=E[u(\tilde{w}_f)]$, tanto el juego como el resultado tienen el mismo valor para el individuo, es decir, es *neutral al riesgo*.

Los aportes académicos siguientes se basan en el supuesto de que todos los individuos son racionales, y la racionalidad implica aversión al riesgo. Tan importante es determinar si los individuos son aversos como medir la "cantidad" en que lo son. A esta "cantidad" se le conoce como prima. A continuación se verá a Jensen y Arrow-Pratt, modelos clásicos para medir la aversión al riesgo.

Ahora bien para observar la influencia del teorema en las actitudes de un individuo frente al riesgo se debe suponer que el agente decisor tiene una determinada función de utilidad sobre su consumo $U(C)$. Así mismo se supone que el individuo conoce la probabilidad de conseguir determinados niveles de consumo y que elegirá entre distintas alternativas *maximizando la utilidad esperada de su consumo*. Entonces sea π la probabilidad que el agente asigna a un determinado nivel de consumo C_i, y la utilidad esperada vendría dada por:

$$EU(C)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i U(C_i).$$

Se diferencia entonces la incertidumbre asociada al consumo como una variable diferente a la utilidad del consumo. Y por ejemplo, en el caso de dos posibles niveles de consumo, C_1 con probabilidad π y C_2 con probabilidad $1-\pi$, el consumo esperado $E(C)$, la varianza $Var(C)$ y la utilidad esperada del consumo vienen dados por:

$$E(C)=\pi C_1+(1-\pi)C_2$$

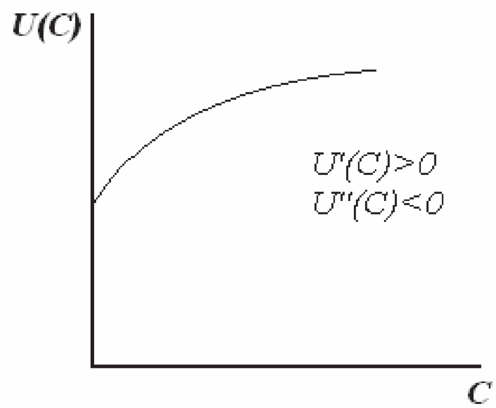
$$Var(C)=\pi\left[C_1-E(C)\right]^2+(1-\pi\left[C_2-E(C)\right]^2$$

$$EU(C)=\pi U(C_1)+(1-\pi)U(C_2)$$

De esta manera, por una parte se puede hablar del riesgo (o variabilidad) del consumo en sí (algo que se puede medir a través de la varianza del consumo) y por otra parte de la actitud del agente frente al riesgo (algo que viene exclusivamente definido por su función de utilidad).

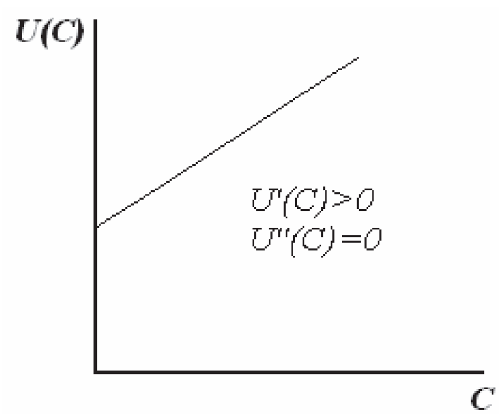
De esta forma V-N-M separan el *riesgo* de la *actitud frente al riesgo*. Ya que mientras el riesgo es un concepto que depende de las características especificas de la lotería o activo financiero que se considera, la actitud frente al riesgo va a depender del individuo en sí y por lo tanto, puede ser distinta para distintos agentes. De hecho, dependiendo de la forma de la función de utilidad se pueden distinguir tres tipos de actitudes frente al riesgo, que son:

- Utilidad marginal positiva y decreciente: Aversión al riesgo.



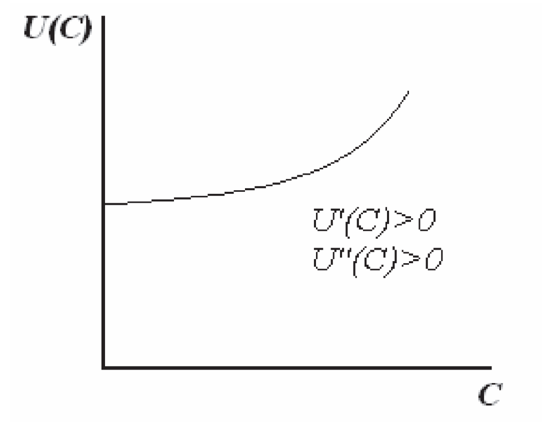
La primera derivada de la función de utilidad es positiva, por lo que la función de utilidad es creciente en el consumo. Además, en este caso, la segunda derivada es negativa por lo que una unidad extra de consumo genera más utilidad para niveles bajos de consumo que para niveles altos de consumo; la utilidad marginal del consumo es decreciente.

- Utilidad marginal positiva y constante: Neutralidad al riesgo.



En este caso, una unidad de consumo extra genera el mismo aumento de bienestar, independientemente del nivel inicial de consumo. La segunda derivada de la función de utilidad es igual a cero y los individuos son neutrales al riesgo.

- Utilidad marginal positiva y creciente: Propensión al riesgo.



En este caso unidades sucesivas de consumo dan lugar a mayores aumentos en utilidad. No solo la utilidad es una función creciente en el consumo y su primera derivada es positiva, sino que la segunda derivada es también positiva.

En general esta sería la caracterización matemática de las actitudes frente al riesgo, y así mientras la función de utilidad sea doblemente diferenciable, las actitudes frente al riesgo se clasificarán por su segunda derivada. Entonces aunque $Ú´(C)>0$ para cada caso se tiene que:

- $U´´(C)<0$, aversión al riesgo (concavidad)
- $U´´(C)=0$, neutral
- $U´´(C)>0$, propensión al riesgo (convexidad)

Para extender este análisis al caso de las loterías, se debe interpretar el valor particular que tome *W* con respecto al valor esperado de la lotería. Así pues, si la utilidad derivada de un valor particular de *W* es mayor que la utilidad esperada de una lotería con el mismo valor de dinero esperado, se dice que tiene "aversión riesgo". Por su parte la "neutralidad al riesgo" se evidencia cuando el valor de retorno *W* es igual a la utilidad esperada de una lotería. Finalmente la propensión al riesgo ocurrirá cuando la utilidad del retorno esperado de una lotería es menor a la utilidad esperada de la lotería.

Cuando V-N-M propusieron esta teoría insistieron en que estos axiomas eran eminentemente razonables y que, por lo tanto, la teoría en si no restringía sustancialmente el ámbito del análisis. Sin embargo casi de manera simultanea a la aparición del teorema, surgieron algunas críticas de la misma entre las cuales cabe mencionar la paradoja de Allais (1953) y la paradoja de Ellsberg (1961). Aunque se debe mencionar que todas estas criticas provienen de la llamada "economía experimental", la cual es una rama de la economía donde se efectúan experimentos encaminados a comprobar el grado de realismo de ciertas prescripciones teóricas.

En general en la literatura de riesgo se encuentran dos medidas formales de aversión al riesgo los cuales intentan capturar al máximo la noción de *precio por el riesgo* o *prima de riesgo*. Pero antes de llegar a ellos se considera pertinente retomar el concepto de juego suma cero, el cual es un juego con un rendimiento medio igual a cero. Así el rendimiento aleatorio ξ es un juego suma cero si $E(\xi)=0$.

En este orden de ideas se dice que la primera medida se conoce como *prima compensatoria de riesgo*, Π_c, que formalmente se define como la cantidad de dinero que habría que pagara un individuo para que acepte un juego suma cero. Entonces se supone un individuo con un nivel de riqueza inicial W_0 y una función de su riqueza $U(W)$. En estas condiciones, la prima compensatoria de riesgo Π_c, viene definida por:

$$U(W_0)=EU(W_0+\xi+\Pi_c).$$

La segunda noción de precio de riesgo es la *prima de seguro de riesgo*, Π_s, que se define como la cantidad de dinero que estaría dispuesta a pagar una persona que soporta un juego suma cero para dejar de soportarlo. Formalmente se define por la ecuación:

$$EU(W_0+\xi)=U(W_0-\Pi_s)$$

Cuando el juego suma cero es suficientemente pequeño ambos conceptos dan lugar a la misma prima de riesgo, en el sentido en que $\Pi_c \cong \Pi_s \cong \Pi$.

Entonces cualquier individuo será adverso al riesgo si y solo si satisface:

$$U[E(W)]>EU(W_0+\xi).$$

Es decir que para cualquier agente adverso al riesgo, la *utilidad* que le reporta el valor esperado de un juego es mayor que la utilidad esperada de jugar. Si además el juego es de suma cero el individuo adverso al riesgo no jugará ese juego y prefiere su riqueza inicial (que coincide con el valor esperado del juego). Nótese que la diferencia entre la utilidad del valor esperado del juego y su utilidad esperada depende del grado de curvatura de la función de utilidad que es, en definitiva, lo que captura el grado de aversión al riesgo para agentes con funciones de utilidad cóncavas.

Así mismo la neutralidad y la propensión al riesgo pueden definirse respectivamente como:

$$U[E(W)]=EU(W_0+\xi)$$
$$U[E(W)]<EU(W_0+\xi)$$

Cuando el juego suma cero es suficientemente pequeño, es posible obtener una aproximación explicita a la prima de riesgo. Este proceso se basa en aplicar la expansión de Taylor para aproximar polinomios en el caso de la prima de seguro de riesgo. El desarrollo de esta aproximación obtiene una ecuación final en la que se evidencia que la prima de seguro dependerá de dos términos:

$$\Pi_s=\frac{U''(W_0)\sigma^2_\xi}{U'(W_0)2} \quad .$$

El termino $\sigma^2_\xi/2$ se refiere exclusivamente al riesgo del juego suma cero, donde cuanto mayor es el riesgo del juego, mayor es la prima de seguro. El otro término depende exclusivamente de las características de los individuos (su función de utilidad). Por lo tanto este término será un buen indicador para la medida de aversión al riesgo del individuo.

En este punto se hace referencia al *coeficiente de aversión absoluta al riesgo* de Arrow-Pratt (A-P) (1965) para un individuo cuya función de utilidad es $U(W)$. El coeficiente se representa como:

$$A(W)=-\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Con esta desagregación de A-P a la prima de seguro de riesgo se puede observar cómo el efecto en la prima de seguro será positivo si y solo si el individuo es adverso al riesgo, ya que la segunda derivada de la función de utilidad sería negativa en dicho caso. Para un individuo neutral al riesgo la prima será cero y para uno propenso al riesgo la prima será negativa.

Si el grado de concavidad de la función de utilidad refleja el grado de aversión que tiene un individuo, parece lógico pensar que la segunda derivada de *U(W)* se asocie con el grado de aversión al riesgo. En el coeficiente *A(W)* no solo se toma la segunda derivada sino que se normaliza por la primera derivada de la función de utilidad. Con esto se asegura que ante transformaciones lineales de la función de utilidad, el cociente entre la segunda y la primera derivada sí se mantengan constantes y por ende se mantendrán las mismas preferencias de los individuos.

Otra medida útil de aversión al riesgo de un individuo es el *coeficiente de aversión relativa al riesgo* de A-P que se define como:

$$RW)=-\frac{WU''(W)}{U'(W)}=WA(W)$$

Como su nombre lo indica, este coeficiente permite capturar la aversión al riesgo en términos relativos o porcentuales. Entonces en el caso de aversión absoluta al riesgo se analizará por ejemplo la cantidad de dinero que un individuo decide invertir en actividades arriesgadas, mientras que con la medida relativa de aversión se analizará en que proporción o porcentaje el individuo decide realizar su inversión en activos riesgosos[21].

21 Según el trabajo de Menezes y Hanson (1970), influenciados por la obra de Arrow-Pratt, la importancia de A(W) en el estudio de aversión se evidencia para el caso en que la riqueza del individuo varía mientras su nivel de riesgo no lo hace. De igual manera para R(W) resaltan su relevancia en el caso en que la riqueza y el riesgo son modificados en la misma proporción.

Tras la teoría de la "Hipótesis de la Utilidad Esperada" de Von Neuman y

DESIGUALDAD DE JENSEN

Primero que todo, la desigualdad de Jensen no es un resultado de un análisis económico sino que es una herramienta matemática que permite determinar la actitud del individuo frente al riesgo mediante la forma o concavidad de una función dentro de un espacio de probabilidad, utilizando para este caso en especifico una función $U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con una variable aleatoria x y con una función de distribución de probabilidad $F(x)$.

La formalización de la desigualdad para representarla como un problema de elección de loterías en incertidumbre sería:

Si para cualquier lotería F(•), la lotería descompuesta que rinde $\int xdF(x)$, con certeza es al menos tan buena como la lotería F(•) misma, podemos decir que u(x) es cóncava. Si las preferencias admiten ser representadas como una función Bernoulli de utilidad esperada[22], la definición anterior se puede expresar como:

$$\int u(x)dF(x) \le u\left(\int xdF(x)\right)$$

Dado que la distribución de probabilidad es continua, la representación del valor esperado se puede expresar como la integral alrededor de un valor, así podemos reescribir la expresión anterior como:

$$E\left[u(x)\right] \le u\left(E[x]\right)$$

Repasando los conceptos del apartado anterior, podemos decir que la utilidad esperada es menor que la utilidad del valor esperado, por lo tanto el individuo es averso al riesgo. Uniendo las conclusiones de las dos expresiones anteriores, se puede demostrar que sí la función de utilidad $u(x)$ es cóncava, el individuo siempre será averso al riesgo. Y por lo tanto la utilidad marginal es decreciente con respecto a la riqueza. Y así mismo, si la desigualdad tiene signo contrario se dice que la función de utilidad es convexa y el individuo es amante al riesgo y si los dos valores son iguales la función de utilidad será una línea recta y el individuo es neutral al riesgo.

Sin embargo retomando el aporte de Daniel Bernoulli, para realizar un juego de lotería, a parte de la lotería se necesita "algo" que haga indiferentes a los agentes entre el juego y el resultado, en otras palabras, "algo" que los vuelva neutros al riesgo, con el fin de que los individuos tengan un punto de comparación al momento de tomar la decisión de participar en el juego. A este "algo" se conoce como el *equivalente cierto*. Siguiendo con los conceptos expuestos el *equivalente cierto* de la lotería $F(x)$, denotado $c(F,u)$, es la cantidad de dinero con la cual el individuo es indiferente entre apostar $F(x)$ y la cantidad cierta $c(F,u)$, es decir:

$$u\left(c\left(F,u\right)\right) = \int u(x)dF(x)$$

Es decir iguala la utilidad esperada con la utilidad del valor esperado.

Además, dependiendo de la forma de la función de utilidad los agentes estarán dispuestos a pagar una *prima de riesgo* por deshacerse de ese riesgo si sienten apatía por él. Al contrario que los amantes, que reciben una cantidad para entrar al juego (*prima de compensación*) y para lo neutros esta cantidad es cero.

Para cualquier cantidad dada de dinero x y un número positivo ε, la *prima* probable, denotada por $\pi(x,\varepsilon,u)$, es el exceso en la probabilidad de ganancia sobre las verdaderas opciones, que hacen que el individuo sea indiferente entre el pago cierto x y una apuesta que se encuentra entre $x+\varepsilon$ y $x-\varepsilon$, es decir:

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right)u(x-\varepsilon)$$

Tal y como en una economía bajo certidumbre el individuo es maximizador de su utilidad, en este caso esperada. Para cumplir con esta condición de maximización, se debe cumplir que el agente sea averso al riesgo, que $u(x)$ sea cóncava y dos veces diferenciable $[u'(x)>0, u''(x)<0]$, que la cantidad cierta que hace al individuo indiferente entre el jugar o no, sea menor o igual que lo que rinde la lotería $c(F,u) \le \int xdF(x)$ y que el individuo este dispuesto a pagar una cantidad positiva para librarse o disminuir el riesgo de jugar.

22 Una función Bernoulli de utilidad esperada, es aquella que se encuentra en función de la riqueza y cumple con los axiomas de continuidad e independencia.

Habiendo resuelto el problema de determinar que actitud toma el individuo frente al riesgo, el análisis se dirige ahora a medir esa actitud en términos de cantidades, campo en el cual los profesores Arrow-Pratt son referencia y base de trabajo obligatoria.

ARROW-PRATT

Los profesores Arrow-Pratt trabajaron bajo un modelo de racionalidad, es decir todos los individuos son aversos al riesgo y sus funciones de utilidad son cóncavas. La idea en general es deducir un método que permita establecer la cuantía de esta aversión no solo con el fin de saber el "dato", sino para realizar comparaciones de distintos agentes hacia un mismo evento de riesgo. Con el fin de comprender mejor las ideas de los profesores A-P, a continuación se presenta de manera formal el modelo:

Si se establece el siguiente escenario:

+ Una lotería $\tilde{x}$, que sigue una función de densidad de probabilidad $f(x)$.
+ Un individuo con una riqueza inicial w_0.
+ Una riqueza final que será $\tilde{w}_{f}= w_o+\tilde{x}$
+ Una función de utilidad en función de la riqueza $u(W)$.

Se define la prima de riesgo, $\pi(w,\tilde{x})$, como la cantidad máxima que un individuo esta dispuesto a pagar por deshacerse del riesgo y al mismo tiempo el equivalente cierto es la cantidad que hace al individuo indiferente entre el pago cierto y los pagos de la lotería, por lo tanto la definición anterior se puede escribir:

$$* \quad u(w_o+E[\tilde{x}]-\pi(w_0,\tilde{x}))=E[u(w_o+\tilde{x})]$$

Examinando la definición del equivalente cierto, se encuentra que la cantidad que se le debe pagar al individuo para lograr que sea indiferente entre jugar y el pago, debe ser igual a su capital inicial w_0, más lo que se espera que obtenga por jugar $E[x]$ menos lo que "invirtió" por deshacerse del riesgo $\pi(w_0,x)$, eso es, el individuo aceptará una cantidad igual a está, ya que dentro de ese valor ya esta descontada la cobertura que hace él del riesgo, por lo tanto tendría el mismo nivel de utilidad si juega o recibe el pago cierto.

Teniendo en cuenta que la riqueza inicial y el valor del juego están dados desde el principio, lo importante será establecer cual va a ser el valor de la prima de riesgo, que en ultimas es el que determina que tan averso es un individuo. Antes de comenzar con el modelo matemático se analiza lo siguiente, si un individuo siente demasiada aversión por el riesgo, la única manera de que él "juegue" es realizando una cobertura del riesgo, y entre más riesgo considere el individuo que halla, más tendrá que cubrirse, en otras palabras tendrá que pagar más por deshacerse del riego, por lo tanto desde ya se puede suponer que entre más averso sea un individuo al riesgo su prima de riesgo es mayor.

Para mirar de manera más directa la relación entre prima de riesgo y aversión, los profesores A-P utilizaron las Series de Taylor, lo que se conoce como la aproximación de Arrow-Pratt:

Series de Taylor:

Aprox. De primer orden: $g(z+l)=g(z)+l*g'(z)+0(l^2)$

Aprox. De segundo orden: $g(z+l)=g(z)+\frac{l^2}{2}g''(z)+0(l^2)$

La aproximación de primer orden se le aplica al término de la izquierda y la de segundo orden a la de la derecha de la expresión *, alrededor de la esperanza del equivalente cierto:

Para el término de la izquierda:

$$g(z)=u, z=w_0+E[\tilde{x}], l=-\pi$$

$$u(w_0+E[\tilde{x}]-\pi)=u(w_0+E[\tilde{x}])-\pi u'(w_0+E[\tilde{x}])$$

Para el término de la derecha:

$$g(z)=u, z=w_0+E[\tilde{x}], l=x-E[\tilde{x}]$$

$$E[u(w_0+\tilde{x})]=\int [u(w_0+E[\tilde{x}]+\tilde{x}-E[\tilde{x}])]f(x)dx$$

$$E[u(w_0+\tilde{x})]=\int [u(\tilde{w}_0+E[\tilde{x}])+ (x-E[\tilde{x}])u'(w_0+E[\tilde{x}])+ \frac{(x-E[\tilde{x}])^2}{2}u''(w_0+E[\tilde{x}])]f(x)dx$$

$$E[u(w_0+\tilde{x})]\approx u(w_0+E[x])+u''(w_0+e[\tilde{x}])\sigma^2$$

Retomando la expresión * se puede igualar las dos últimas ecuaciones y despejando se obtiene,

$$\pi(w_0,\tilde{x})\approx-\frac{u''(w_0+E[\tilde{x}])\sigma^2}{u'(w_0+E[\tilde{x}])2}$$

Como resultado la prima de riesgo, está en función de la riqueza inicial y el valor esperado de la lotería. La prima de riesgo tiene dos componentes:

Subjetiva: $R^u = \frac{u''(w_0+E[\tilde{x}])}{u'(w_0+E[\tilde{x}])}$ se conoce como el coeficiente de aversión al riesgo, y mide dicha aversión.

Objetiva: $\frac{\sigma^2}{2}$ es el riesgo intrínseco, todo el mundo lo conoce y lo puede medir además de ser el mismo para todos.

Para determinar que individuo es más averso que otro, las siguientes propiedades son equivalentes:

Dadas dos funciones de utilidad, se dice que u_2 tiene una aversión al riesgo mayor que u_1 si y solo si se cumplen estas propiedades:

- $R^u(u_2) > R^u(u_1)$, el coeficiente de aversión con respecto a u_2 es mayor que con respecto a u_1.
- Existe una función cóncava creciente $\varnothing(\bullet)$, tal que $u_2(w) = \varnothing(u_1(x))$ para todo x. En otras palabras u_2 es una transformación cóncava de u_1, por lo tanto u_2 es más cóncava.
- $c(F,u_2) < c(F,u_1)$, que el equivalente cierto de u_2 sea menor que el equivalente cierto de u_1.
- $\pi(w,x,u2) > \pi(w,x,u_1)$, la prima pagada por u_2 debe ser mayor, ya que su coeficiente de aversión es mayor.
- Si u_2 acepta una lotería $F'(\bullet)$ al menos tan buena como algún pago cierto x, entonces u_1 también aceptará $F'(\bullet)$. Implicando $\int u_2(x)dF'(x) \geq u_2(\bar{x})$ y $\int u_1(x)dF'(x) \geq u_1(\bar{x})$, es decir cualquier riesgo tomado por u_2 desde una posición de certidumbre, u_1 también lo aceptará.

Como ya se ha resaltado anteriormente la importancia de determinar el comportamiento de un agente frente a una situación de incertidumbre se basa en la capacidad que esto brinda para poder hacer comparaciones entre distintos individuos. Un gran avance en este sentido es la aproximación de Arrow-Pratt, sin embargo no es la única. La comparación también se puede hacer mediante la clasificación de las loterías, determinando cual es la más riesgosa y estableciendo en dicho caso cual será la elección del individuo.

COMPARACIÓN DE LA DISTRIBUCION DE LOS PAGOS

Para realizar este análisis nuevamente se recurres a las herramientas que ofrecen otras disciplinas complementarias a la economía, en este caso la estadística. Particularmente la dominancia estocástica, la cual permite establecer para diferentes distribuciones de probabilidad, cual de ellas presenta una mayor media con la menor volatilidad posible.

Para aplicar este concepto al problema de selección en incertidumbre, se supone que dichas funciones de distribución de probabilidad representan a las loterías.

Los retornos de las loterías se pueden medir por nivel o por distribución, por ejemplo, si existe una lotería $F(\bullet)$ rinde más que $G(\bullet)$ (dominancia estocástica de primer orden) y $F(\bullet)$ es menos riesgosa que $G(\bullet)$ (dominancia estocástica de segundo orden). La funciones $F(\bullet)$ y $G(\bullet)$ serán restringidas por $F(0)=0, F(x)=1$ y $G(0)=0, G(x)=1$ para algún x.

<u>Dominancia Estocástica de Primer Orden</u>

La distribución $F(\bullet)$ dominará estocasticamente en primer orden a $G(\bullet)$, si para una función no decreciente $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, se tiene:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

También si $F(x) \leq G(x) \forall x$.[23]

Dado que la dominancia estocástica de primer orden se refiere a los niveles de las distribuciones se puede decir que, la lotería *F* será preferida a *G*, si para una misma función de utilidad, la utilidad esperada con respecto a *F* es mayor que la utilidad esperada con respecto a *G*.

<u>Dominancia Estocástica de Segundo Orden</u>

Ahora se quiere comparar distribuciones o loterías, basados en la volatilidad o dispersión, es decir cual es menos riesgosa. Para evitar la coyuntura entre el retorno y el riesgo, se supone que las distribuciones tienen la misma media:

$$\int x dF(x) = \int x dG(x)$$

Para cualquier dos distribuciones $F(x)$ y $G(x)$, con la misma media, $F(x)$ domina estocastica-

23 Esto no quiere decir que todos los posibles retornos de $G(x)$ sean más altos que $F(x)$.

mente en segundo orden a $G(x)$, si para cada función no decreciente $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, se tiene:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

Si para dos loterías que poseen una misma media, la utilidad esperada con respecto a F es mayor que con respecto a *G*, la única manera de que esto sea posible es que primero *G* tenga una mayor dispersión alrededor de la media que *F*, por lo que podemos considerar a *G* más riesgosa que *F* y segundo dado la clasificación de riesgo de las loterías, la utilidad esperada de la menos riesgosa es mayor que la utilidad esperada de la otra, es porque la función de utilidad es cóncava por consiguiente el individuo que realizó esta decisión es averso al riesgo.

Se puede decir que la dominancia estocástica ayuda a determinar que loterías son más riesgosas y cuales tienen más retornos, y en cierta forma a valorarlas porque ayudan a determinar los pagos futuros. Ahora si se ve, las loterías tienen un comportamiento parecido a un activo financiero riesgoso, ya que la incertidumbre girar alrededor de los pagos futuros. Siendo este el caso, lo más acertado para valorar activos riesgosos es el modelo de activos contingentes Arrow-Debreu, que se presentará a continuación.

MODELO ARROW-DEBREU

En general, para determinar cual es el retorno futuro de un activo se usa un modelo de probabilidades, las cuales no son del todo precisas, ya que son de carácter subjetivo, es decir cada individuo las calcula de acuerdo a sus expectativas individuales, provocando que para un mismo evento dos individuos tengan diferentes probabilidades de ocurrencia y por tanto el modelo de probabilidades no sea tan asertivo. Para disminuir en algo este problema lo mejor es trabajar con probabilidades bayesianas ó probabilidades condicionales. Sin embargo en el año 1953 y 1964 el profesor Arrow, y luego en 1959 el profesor Gerad Debreu, desarrollaron el modelo de activos contingentes elementales.

Este desarrolla un esquema de valoración en el cual, la incertidumbre de los pagos futuros se atan a hechos o escenarios posible denominados estados de la *naturaleza*. El modelo funciona bajo el supuesto de arbitraje, y el horizonte son dos periodos.

Para empezar a comprender el modelo primero se tiene que definir que es activo contingente, activo Arrow-Debreu, precios Arrow-Debreu, cartera replica y estados de la naturaleza.

Activo Contingente: es aquel activo financiero para el cual sus pagos se definen como una función de un evento futuro incierto.

Activo Arrow-Debreu: es un activo que paga 1 si hay un determinado estado de la naturaleza y 0 en caso contrario.

Precios Arrow-Debreu ($\varnothing_s$): valoran hoy las unidades de consumo futuras teniendo en cuenta tanto la incertidumbre de cada estado de la naturaleza como la valoración temporal del dinero.

Cartera Replica: dado un activo o portafolio riesgoso, la cartera replica permite reproducir los retornos de ese activo o portafolio riesgoso a través de una combinación entre un activo libre de riesgo[24] y ese mismo activo o portafolio. Es decir, se puede crear una cartera capaz de reproducir los pagos de un activo riesgoso pero con una varianza menor.

Estado de la Naturaleza (s): es un evento futuro incierto, para el cual cada activo tendrá un pago. Es decir, la relación es uno a uno, para cada estado de la natura habrá un único pago, y viceversa. A estos estados se les suele dar una probabilidad de ocurrencia (π_s). Existe un conjunto *S* que contiene un número finito de estados de la natura.

El modelo matemático se conforma de la siguiente manera:

Hay un activo j que en el estado de la naturaleza s, genera un flujo de caja X_{js} y hay un precio del activo A-D $\varnothing_s$. En ausencia de arbitraje el valor del activo será:

$$V_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js}$$

24 Activo libre de riesgo se define como aquel activo cuya probabilidad de generar retornos no positivos en casi nula. El ejemplo más citado son los bonos del gobierno o tesorería.

Es importante anotar que, las probabilidades de cada estado de la natura no son necesarias, ya que los precios de los activos contingentes son suficientes para valorar cualquier activo financiero mediante la cartera replica siempre que existan tantos activos financieros con pagos linealmente independientes como números de estados de la naturaleza, es decir, que exista un conjunto completo de activos A-D.

Al considerar cualquier activo *j* que paga *X* en el estado de la natura *s*, el agente puede replicar dicho pago manteniendo *X* en s=1,....*S*. Para que no haya arbitraje, el costo de la cartera replica de activos A-D debe ser igual al costo del activo *j*.

El costo de dicha cartera de activos A-D es el resultado de multiplicar precios por cantidades:

$$V_j = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js}$$

Comúnmente la cartera replica se construye a partir de activos libres de riesgo (bonos cupón cero) que pagan 1 al final del periodo, con un precio:

$$b = \frac{1}{1+r}$$

Si al final del periodo se tiene un titulo por cada activo A-D, se está asegurando recibir 1 al final de dicho periodo, y como se adquirió una cartera replica de un bono cupón cero que también entregará 1 al final del periodo, en ausencia de arbitraje, el costo de la cartera replica debe ser igual a la suma de los precios de los activos A-D:

$$\sum_{s=1}^{S} \phi_s = b = \frac{1}{1+r}$$

Habido expuesto el modelo de activos A-D, ahora se puede analizar las preferencias de un individuo cuando hay más de dos estados[25], llevándonos al tema de las utilidades estado-dependientes.

UTILIDADES ESTADO DEPENDIENTES

La definición de estado de la naturaleza y su probabilidad permanecen tal y como en el modelo anterior. Sin embargo se va a limitar a los retornos que sean positivos[26].

El comportamiento de *s* se puede expresar como una variable aleatoria $g{:}s \to \mathbb{R}_+$ que convierte los estados de la natura en pagos de dinero, tal que para cualquier:

$$F(\bullet) \Rightarrow F(x) = \sum_{\{s:g(s)\le x\}} \pi_s, \forall x$$

Como *S* es finito posee un vector de pagos $(x_1,....x_s)$, donde x_s es el pago no negativo de *s*. El conjunto de todas las variables aleatorias no negativas es entonces $\mathbb{R}^s_+$.

Descrita la base del modelo se pasa a analizar las presencias y la representación de la utilidad esperada.

El enfoque se hará en la relación $\succsim$ sobre el conjunto de variables aleatorias no negativas $\mathbb{R}^s_+$. Se define el activo *s* como la variable aleatoria que paga 1 si y solo si el estado de la naturaleza *s* ocurre (activo contingente), entonces el conjunto $\mathbb{R}^s_+$ es precisamente el conjunto enlace de esos activos contingentes.

Aplicando la lógica para mostrar la representación de las preferencias utilizada anteriormente, se tiene:

La relación de preferencia $\succsim$ tiene una representación extendida de la utilidad esperada si para cada $s \in S$, hay una función $u_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que para cualquier (*x*1,..$u_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ y $(x',....x'_s) \in \mathbb{R}^s_+$:

$$(x_1,...,x_S) \succsim (x'_1,...,x'_S) \Leftrightarrow \sum_s \pi_s u_s(x_s) \ge \sum_s \pi_s u_s(x'_s)$$

Esta expresión guarda similitud con la expuesta en el problema de las loterías, y esto se debe a que en las loterías se asociaba sus pagos a una función de distribución al igual que los estados de la naturaleza, por lo tanto la conclusión es similar. Un individuo que se enfrenta a dos estados de la natura con pagos vectores de pagos diferentes, el criterio que utiliza para saber cual de ellos es más beneficioso es el de la utilidad esperada, el cual le dice que el preferirá un vector de pagos a otro si y solo si la utilidad esperada de ese vector es mayor o igual a la utilidad esperada del otro vector.

25 En los casos anteriores de utilidad esperada el modelo hacia referencia hacia un solo estado.

26 Un individuo no tendría incentivo en escoger una canasta que le proporcione un pago negativo, es decir una perdida de riqueza.

Hasta ahora se ha mostrado como un agente resuelve el problema de elección cuando se encuentra en un ambiente de incertidumbre. De ahora en adelante se tiene que especificar de qué tipo de agente económico se está hablando, y para la economía financiera el agente representativo de los modelos es el inversionista. Para empezar a comprender el comportamiento del inversionista bajo incertidumbre se utilizará el trabajo de Jack Hirshleifer.

DECISIONES DE INVERSIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

En la economía comúnmente se habla de dos tipos de agentes familias y firmas, sin embargo desde el momento en que las familias deciden ahorrar o las firmas en invertir, o en ambos casos adquirir deuda, su comportamiento empieza a regirse por el comportamiento de una tasa de interés. En cualquiera de los casos, se hace un sacrifico en el presente esperando un beneficio futuro, para el caso de incertidumbre sería un sacrifico cierto con el fin de obtener un beneficio incierto, entonces cualquier agente que presente este tipo de comportamiento es un inversionista.

La dinámica en la cual el inversionista realiza este sacrifico comienza con la decisión por parte del agente acerca del consumo. Luego de acuerdo con su función de inversión decidirá si es prestamista o prestatario.

Existe una economía de dos periodos (t=0,1), en el periodo 1 se da uno de los dos siguientes estados de la natura s=1,2 y cada uno tiene una probabilidad de ocurrencia $\pi 1,\pi 2$. El agente escoge un consumo en el periodo 0 c_0 y un consumo incierto en el periodo 1 $\tilde{c}1=c1$ ($c_{11},c_{12};\pi_1,\pi_2$). El inversionista posee una función de utilidad esperada estado-dependiente $u(c_0,\tilde{c}_1)$ que le sirve primero para determinar que canasta escoge cuando se presenta el estado de la natura 1 o 2, y segundo para determinar su nivel de consumo en el tiempo, es decir, determinar su preferencia por consumir hoy ó mañana. Al igual que en cualquier problema de consumo en certidumbre el agente maximiza su utilidad de acuerdo con su restricción presupuestal dada por la siguiente expresión:

$$(1+r)c_0+\tilde{c}_1=(1+r)y_0+\tilde{y}_1$$

Para empezar con la maximización primero el inversionista debe escoger que canasta consumirá en el momento que se presente alguno de los estados de la naturaleza. De la misma manera que el agente tiene una preferencia por el tiempo, tiene una preferencia por alguno de los estados de la natura, por ejemplo si $\pi_1>\pi_2$, el agente deseará tener una mayor nivel de consumo en ese estado ya que es el más probable que suceda, sin embargo el agente podrá consumir lo mismo en los dos estados si para el estado de la natura 2 se le agrega una lotería que de alguna manera le equipare las probabilidades de ocurrencia entre los estados. Para el caso en que las probabilidades sean iguales el agente tendrá el mismo nivel de consumo en los dos estados, $c_{11}=c_{12}$, dentro del plano de mapas de curvas de indiferencia esta característica está representada por una línea de 45 grados. En cada punto de esa línea, los niveles de consumo para cada estado serán iguales de la misma manera que las probabilidades de ocurrencia de los estados de la natura, para cualquier nivel de utilidad esperada.

Siguiendo con el caso específico $\pi_1>\pi_2$, lo segundo que debe hacer el agente es maximizar su utilidad esperada en relación con sus preferencias íntertemporales, sujeto a su restricción presupuestal, por las condiciones de primer orden se tiene:

$$TMS=\frac{\frac{\partial u}{\partial c_1}}{\frac{\partial u}{\partial c_0}}=1+r$$

El agente maximizará su utilidad esperada siempre y cuando la tasa a la que desea cambiar consumo presente por consumo futuro, sea igual a la tasa efectiva a la que se pude cambiar, la tasa de interés. En el caso en que la TMS sea mayor que la tasa de interés, el agente reducirá el consumo en el futuro aumentado el presente, reduciendo la TMS hasta el punto que sea igual a la tasa de interés, para el caso en el que la TMS sea menor, será lo contrario.

Sin embargo, se supone que el agente además de consumidor a su vez es propietario de una firma, la cual tiene una función de producción. Brindándole la posibilidad al agente de inferir una curva de inversión. Se tiene una función de producción neoclásica, con dos factores: trabajo y capital. Para el análisis tendremos un factor fijo, el trabajo. En una economía de dos periodos la firma se concentra en decidir si utiliza todo o alguna parte de su capital hoy, ó rentarlo a una tasa de interés hoy para recibir los pagos mañana. En ese sentido la empresa maximizará su función de inversión cuando la tasa de transformación técnica sea igual a la tasa de interés, en otras palabras, la inversión de un agente se maximiza cuando la tasa a la que él desea alquilar capital sea igual a la tasa de interés[27]:

$$TMST = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial k_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial k_0}} = 1 + r$$

Si la TMST es mayor que la tasa de interés, a la firma se saldrá más barato alquilar capital, más de lo que ella esperaba, por lo tanto incrementará su stock de capital hoy, disminuyendo la acumulación en el futuro. Por otro lado, si la TMST es menor que la tasa de interés, la firma podrá prestar su capital a una tasa más alta de lo que ella desea, reduce su stock de capital hoy para prestarlo a una tasa de interés, con el objetivo que en el siguiente periodo pueda aumentar su capital en ($1+r$).

Si se supone que existe un solo bien, y se lo define como numerario, es decir, que el capital se puede expresar en función del bien, se puede integrar dentro de un mismo plano las decisiones del agente que es consumidor y su vez posee una firma.

Entonces, ahora sí el inversionista, tendrá que resolver el problema del capital y del consumo simultáneamente sujeto a una tasa de interés. La condición para maximizar tanto la función de utilidad como la inversión, es la siguiente:

$$TMS = TMST = 1 + r$$

Es decir, la tasa a la que el inversionista desea prestar o pedir prestado debe ser igual a la tasa a la cual él desea cambiar consumo futuro por presente y a su vez a la tasa de interés.

Para una mejor explicación se supone que el agente ya se encuentra en el punto de eficiencia dentro de su curva de inversión, es decir que su TMST es igual a la tasa de interés. Si TMS es menor que la tasa de interés, el individuo en el punto de eficiencia consumirá c_0, sin embargo dado su mapa de curvas de utilidad él desea consumir menos, c^*_0 para poder invertir en el mercado financiero c_0-c^*_0, con un retorno de $1+r$ y consumir más en el mañana, es decir nuestro inversionista es un prestamista. Para el caso contrario, cuando la TMS es mayor a la tasa de interés, en el punto de eficiencia el inversionista consumirá c_0, pero dadas sus preferencias ínter temporales el desea consumir c^*_0, para ello el inversionista deberá ir al mercado financiero y pedir prestado c^*_0-c_0 a una tasa de $1+r$, en este caso el inversionista es prestatario.

En conclusión el anterior modelo ayuda a identificar en que momento es mejor para un individuo prestar ó pedir prestado, decisión que se basa en el nivel de la tasa de interés. Llevando estos conceptos un poco más lejos se puede decir que el agente se puede endeudar en el mercado financiero a una tasa de interés libre de riesgo[26] al igual que invertirá su dinero esperando recibir como mínimo esa misma tasa. Es aquí donde se introduce todo el análisis de la teoría del portafolio ya que permite determinar cual es la mejor forma de utilizar la riqueza en el mundo de las finanzas.

BIBLIOGRAFIA

AMA, Eugene. F y KENNETH R French ""The cross Sectional of Expected Returns", *The Journal of Finance* 47, 1992, pp. 427 - 465.

HIRSHLEIFER, J. "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach", *The Quarterly Journal of Economics*, 1966, Vol. 80, No. 2, pp 252-277.

LEVY, Haim and MARKOWITZ, Harry. "Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance", *The American Review*, Vol.69, No. 3, 1979, pp 308-317.

LINTNER, John, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, 1965, No. 1, pp 13-37.

27 A este punto también se le conoce como punto de eficiencia. Para un análisis más profundo y acertado, se debe trabajar con una función de producción estado-dependiente, sin embargo para efectos de simplicidad en este documento se supone que para cualquier estado de la natura es cierto el nivel de producción y capital.

LUCAS, Robert E., "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, Vol. 46, No. 6 (Nov., 1978), pp. 1429-1445

MASS-COLELL, Andrew, WHINSTON, Michael and GREEN Jerry, *Microeconomics Theory*, Oxford: Oxford University Press.1995.

MARKOWITZ, Harry, *Foundations of Portfolio Theory*, Nobel Lecture. 1990

MOSSIN, Jan. "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966, pp 768-783.

ROLL, Richard; ROSS, Stephen, "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *The Journal Of Finance*, Vol. 35, No. 5, 1980, pp 1073-1103.

SHARPE, William F. Capital *Assets with and without Negative Holdings*. Nobel Lecture., 1990.

SARMIENTO, Rafael y VÉLEZ, Rodrigo. "Un Modelo CAPM continuo: Robert Merton. Una evidencia empírica". Paper presentado en el Congreso Internacional de Finanzas. Cartagena, Colombia. 2007.

SHARPE, William F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *The Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, 1964, pp 425-442.

VON NEUMAN, J. and MORGENSTEN O. *The Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, N. S.: Princeton University Press. 1964,